

Федеральное агентство по образованию

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Приоритетный национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа
Санкт-Петербургского государственного политехнического
университета**

В.А. ПАЛЬМОВ

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ В
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОМЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

**Рекомендовано Учебно-методическим объединением по
университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 150300 «Прикладная
механика»**

**Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2008**

УДК 539.375

ББК 22.22

Рецензенты:

Академик, доктор физико-математических наук, профессор
Морозов Н.Ф. ИПМАШ РАН

Доктор физико-математических наук, профессор Кривцов А.М.,
СПбГПУ

Пальмов В.А. Фундаментальные законы природы в нелинейной термомеханике деформируемых тел. Учебное пособие. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2008. 143 с.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту и содержанию примерной учебной программы дисциплины «Теория упругости» и «Строительная механика машин».

В нем представлены законы природы и дано их приспособление к нелинейной механике деформируемых тел. Учебное пособие адресовано студентам, обучающимся по курсам «Теория упругости» и «Строительная механика машин». Последовательно рассмотрены законы кинематики, законы динамики, а также законы термодинамики.

Учебное пособие может быть полезно для студентов, обучающихся по другим направлениям подготовки и специальностям техники и технологии в области машиностроения.

Работа выполнена в рамках реализации Инновационной образовательной программы Санкт-Петербургского государственного политехнического университета **«Развитие политехнической системы подготовки кадров в инновационной среде науки и высокотехнологичных производств северо-западного региона России»** по мероприятию – Разработка инновационного УМК по направлению подготовки бакалавров и магистров 150300 «Прикладная механика».

Печатается по решению Дирекции Инновационной образовательной программы и редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Пальмов В.А., 2008

© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ	7
1.1. Качественное рассуждение о понятии «материальная точка» в теоретической механике	7
1.2. Применение понятия сплошной среды в механике деформируемых тел	12
1.3. Деформация и поворот окрестности материальной точки	21
1.4. Удлинения и сдвиги в деформируемом теле	27
1.5. Объемная деформация	31
1.6. Тензоры деформаций.....	36
1.7. Мгновенное состояние движения и деформации.....	37
1.8. Тензор скоростей деформации и тензор вихря	41
1.9. Тензор поворота окрестности материальной точки деформируемого тела.....	44
1.10. Тензоры малой деформации и малого поворота	47
2. ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ.....	52
2.1. Пересмотр понятий «сосредоточенная масса» и «сосредоточенная сила» в теоретической механике.....	52
2.2. Плотность материального деформируемого тела и закон сохранения массы.....	52
2.3. Классификация внешних воздействий на деформируемое тело	57
2.4. Рассуждение о внутренних взаимодействиях в деформируемом теле	61
2.5. Интегральные уравнения динамики деформируемых тел.....	67

2.6. Условия выполнения интегральных уравнений динамики деформируемых тел при непрерывном векторе напряжений	69
2.7. Условия выполнения интегральных уравнений динамики деформируемых тел при кусочно-непрерывном векторе напряжения.....	74
2.8. Механический смысл координат тензора напряжений	80
2.9. Дифференциальные уравнения динамики деформируемых тел ...	88
2.10. Тензор напряжений в главном базисе.....	98
2.11. Примеры определения главного базиса тензора напряжений и главных напряжений.....	103
3. ТЕРМОДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ	113
3.1. Предварительные замечания.....	113
3.2. Классификация тепловых воздействий и взаимодействий.....	113
3.3. Первый закон термодинамики — закон сохранения энергии	116
3.4. Условия выполнения интегрального уравнения первого закона термодинамики при непрерывном тепловом потоке	121
3.5. Условия выполнения интегрального уравнения первого закона термодинамики при кусочно-непрерывном тепловом потоке	122
3.6. Физический смысл координат вектора теплового потока	127
3.7. Дифференциальное уравнение первого закона термодинамики .	131
3.8. Второй закон термодинамики	133
3.9. Третий закон термодинамики	140
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	141
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	142

ВВЕДЕНИЕ

Это учебное пособие посвящено формулировке фундаментальных законов природы и их применению в механике деформированных тел. Оно состоит из трех глав.

Первая глава посвящена кинематике деформируемых тел. При описании движения использованы традиционные для этой проблемы лагранжевы и эйлеровы подходы. Рассмотрение движения окрестности некоторой типичной материальной точки проведено с использованием полярного разложения, так называемого, деформационного градиента. В соответствии с этим разложением введены в рассмотрение правый и левый тензоры искажений. С их помощью введены и выражены известные тензоры Коши – Грина, Фингера и Альманси. Представлено две интерпретации движения малой окрестности типичной материальной точки: сначала, изменение размеров в соответствии с правым тензором искажений, и затем, поворот, или наоборот, сначала поворот, а потом изменение размеров в соответствии с левым тензором искажений.

Далее, разъяснен механический смысл введенных мер деформации и тензоров деформации.

Нетрадиционным является введение тензора поворота окрестности материальной точки. Он определен с использованием ортогонального триэдра, вращающегося с угловой скоростью окрестности. Отдельный параграф отведен установлению связей между материальными скоростями изменения мер деформации, с одной стороны, а с другой — тензором скоростей деформации и тензором вихря.

Вторая глава посвящена динамике деформируемых тел. Сформулировано два независимых закона динамики Эйлера. Первый закон — это закон изменения количества движения материального тела, и второй — закон изменения его момента. Во всех учебниках и книгах по механике деформируемых тел тензор напряжений Коши вводится путем рассмотрения равновесия элементарного тетраэдра. Со времен Коши этот тетраэдр кочует из одного учебника в другой. В представленном учебном пособии использован альтернативный подход. Он никак не связан с рассмотрением равновесия тетраэдра и выглядит проще и убедительнее. Он получен, как результат использования интегрального уравнения

динамики при непрерывном и дифференцируемом векторе напряжения. Подобное рассмотрение динамики материального деформируемого тела при кусочно-непрерывном векторе напряжения приводит к известным условиям на поверхности разрыва.

Далее, подробно рассмотрен вопрос об определении главного базиса тензора напряжений Коши и его главных значений и главных инвариантов. Много внимания уделено вычислению интенсивности массовой силы. Кроме традиционных для этого вопроса случаев действия силы тяжести и центробежной силы, рассмотрен вопрос об определении массовых сил в элементах гиростата.

Последняя глава посвящена законам термодинамики: первому, второму и третьему. Первый закон термодинамики — это закон сохранения энергии. Что касается второго закона термодинамики, то известно около трех десятков различных его формулировок. В учебном пособии приведена наиболее общая из них, а именно, неравенство Клаузиуса – Дюгема. Представлено также следствие этого неравенства — так называемое, универсальное диссипативное неравенство. Завершается глава третьим законом термодинамики — законом Нернста. Важно отметить, что все законы природы, сформулированные в интегральной форме, должны выполняться как для материального деформируемого тела в целом, так и для выбранных произвольно его кусков. Далее, все законы природы, сформулированные в локальной форме, т.е. в форме дифференциальных уравнений и неравенств должны выполняться во всех точках деформируемого тела.

1. КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

1.1. Качественное рассуждение о понятии «материальная точка» в теоретической механике

Эта глава посвящена кинематике деформируемого тела. В выборе материала этой главы можно было бы покорно следовать многочисленным книгам по механике деформируемого тела. В них содержится приспособление понятий и методов теоретической механики к потребностям механики деформируемого тела. Однако, прежде чем делать это порассуждаем немного.

В теоретической механике кинематика называется геометрией движения, и под движением понимается перемещение точки в пространстве [1]. Вот и все! С таким пониманием движения связано фундаментальное понятие теоретической механики — понятие о материальной точке. Под ней понимается материальное тело, имеющее бесконечно малые размеры, но обладающее некоторой конечной массой. Имеет ли такое абстрактное понятие какое-нибудь отношение к действительности? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо обратиться к физике. А современная физика рисует следующую картину материального тела: оно состоит из молекул, атомов, протонов, нейтронов, электронов, нейтрино или из больших их скоплений, которые называются кластерами. Какой из этих объектов больше всего подходит для того, чтобы служить идеальной моделью материальной точки теоретической механики? Возьмем, например, электрон. Размеры его чрезвычайно малы, так что как будто, он может быть идеальным примером или образом материальной точки. Электрон обладает некоторой массой. Так что вроде бы и здесь все хорошо. Но вот что беспокоит. Оказалось что при расшифровке и истолковании треков ядерных частиц, в том числе электронов после их столкновений приходится учитывать спины этих частиц, а точнее их кинетические моменты. А кинетический момент связан с вращением этих частиц. Все это означает, что даже маленький электрон способен не только перемещаться в пространств, но и вращаться. Значит ли это, что электрон — плохой пример материальной точки? Возьмем что-нибудь покрупнее, например, кластер или кристаллит

поликристаллического металла. Конечно, можно отождествить движение его центра масс с движением некоторой идеальной материальной точки, имеющей такую же массу, как и масса кластера или кристаллита. Но ведь кластер или кристаллит может еще вращаться вокруг своего центра масс. Значит ли это, что и кластер тоже не может быть идеальным примером материальной точки? Полагаю, что здесь проявляется недостаточность самого понятия материальной точки в теоретической механике. Мы приходим к заключению о том, что необходим пересмотр понятия материальной точки, для того, чтобы использовать его при описании движения вещества. Материальная точка должна уметь не только перемещаться в пространстве, но и вращаться! Мы приходим к идеальному понятию тела-точки — объекту, имеющему бесконечно малые размеры, но конечную массу и конечный момент инерции. Все это необходимо для того, чтобы материальная точка могла иметь не только количество движения, но и момент количества движения. В этом случае и электрон и кластер могут оказаться прекрасными реальными примерами идеальной материальной точки, конечно, на разных уровнях описания.

Механика, построенная на концепции материального тела-точки называется механикой Коссера. Все большее количество исследователей уходят от классической концепции бестелесной материальной точки к концепции тела-точки Коссера. На базе этой концепции построена механика деформируемого тела Коссера. Подробному рассмотрению этого вопроса посвящена глава 13 книги [2]. Получено некоторое количество решений конкретных задач. Их можно сравнивать с классическими решениями. Они различаются. Конечно, это различие оказалось существенным. В отличие от классической теории в теории Коссера кроме характерных для классической теории плавных решений появляются составляющие типа краевого эффекта, т. е. быстро изменяющиеся вблизи границ и включений. Однако, важно отметить, что в теории Коссера появляется новый параметр материала l , имеющий размерность длины. Так вот, если размеры материального тела велики по сравнению с этим параметром, то классическое решение и решение Коссера отличаются мало, и этим различием можно пренебречь и без колебаний пользоваться классическими построениями теории и решениями. А в том случае, когда

размеры материального тела оказываются соизмеримыми с параметром материала тела l , то различие становится существенным.

Рассмотрим с этой точки зрения классическую задачу Кирша об одноосном растяжении бесконечно большой пластинки с круговым отверстием [3]. Эта задача замечательна тем, что в ней имеется всего один размер тела — радиус отверстия r . Классическое решение дает для коэффициента концентрации напряжений значение 3. Это значит, что максимальное напряжение, которое достигается на контуре отверстия в три раза больше, чем напряжение, приложенное на бесконечности [3]. Удивительным и несколько обескураживающим для человека с физическим мировоззрением является тот факт, что коэффициент концентрации вообще не зависит от радиуса отверстия. Это нонсенс!

Всякий физик приведет Вам такое рассуждение. Допустим, что деформируемое тело представляет собой кристаллическую решетку. Так вот, если в этой решетке «сделать» отверстие диаметром, значительно меньшим, чем межатомное расстояние, то с этой решеткой фактически ничего не произойдет, а значит, на контуре этого мифического отверстия напряжения будут такими же как и на бесконечном удалении от отверстия. Таким образом, следует ожидать, что в этом случае коэффициент концентрации окажется равным единице. А вот по классической теории упругости он вообще не зависит от размеров отверстия и всегда равен трем. Такой вывод из классического решения задачи Кирша явно находится в противоречии со здравым смыслом.

Решение той же задачи по теории Коссера такую зависимость от радиуса отверстия явно демонстрирует [4]. Оказывается, что если радиус отверстия r велик по сравнению с параметром l , то коэффициент концентрации напряжений равен 3, а если этот радиус r мал, опять таки, по сравнению с параметром материала l , то коэффициент концентрации напряжений уменьшается до 1.8 [4]. Но ведь физик уже убедил нас в том, что в последнем случае предел должен быть равен единице. Еще одно физическое соображение подтверждает этот вывод. Ведь при малом радиусе отверстия противоположные его берега оказываются так близко, что начинают взаимодействовать друг с другом, т. е. целостность пластины полностью восстанавливается.

Но Вы воскликнете: ни у Кирша в классической постановке задачи, ни у Кирша в постановке задачи по теории Коссера этой единицы не получилось! А это соображение подталкивает к заключению о том, что ни одна из теорий не отражает полностью физические процессы, происходящие на микроуровне. В защиту теории Коссера воскликну: но ведь 1.8 ближе к единице, чем три. Так что теория Коссера лучше отражает эти процессы. Она представляет собой очередное, после классического, приближение к рассмотрению и описанию движения материальных тел.

Возможны ли какие-нибудь более изощренные приближения к этой проблеме? Происходит дальнейшая эволюция понятия материальной точки в механике. Если в классической механике материальная точка имеет всего три степени свободы поступательного движения, то в теории Коссера их уже шесть — как у твердого тела. Является ли это пределом? Нет! Появилась теория Миндлина [5] в которой материальная точка наделяется дополнительно еще шестью степенями свободы однородной деформации. Но оказалось, что и это не предел увеличения степеней свободы материальной точки. Появилась еще более сложная теория Грина-Ривлина [6] — мультиполярная теория. Решения даже простых задач становятся феноменально сложными. Однако, вот что замечательно. Во всех этих модернистских теориях появляются параметры материала $l_k (k = 1, 2, 3, \dots, N)$, имеющие размерность длины. И вот оказывается, что когда они все малы по сравнению с характерными размерами материального тела, то отличие всех этих уточненных решений от классических становится пренебрежимо малым. Уверовав во все сказанное, можно без колебаний пользоваться классическими решениями типичных инженерных задач. Поэтому во всем последующем материале этой главы приводится традиционное построение кинематики, основанное на классическом истолковании понятия материальной точки. Обращаю внимание читателя и слушателя лекций на то, что характерный размер l , присущий материалу, можно приближенно отождествлять с характерными размерами структуры материала, например, с размерами кристалла в поликристаллическом материале или кластера в полимере.

Итак, каждая материальная точка имеет в физике свой образ: это фактически маленькое твердое тело. А твердое тело может и перемещаться в пространстве и вращаться вокруг своего центра масс. Важно иметь в

виду, что это независимые виды движений. Говоря на языке теоретической механики, все это означает, что материальная точка имеет шесть степеней свободы, а не три! Несомненно, что все сказанное бесспорно. Физики давно поняли это и давно уже наделяют свои элементарные частицы не только импульсами поступательного движения, но и независимыми от них спинами.

Все это наводит на грустную мысль о необходимости построения новой механики, а значит и механики деформируемых тел.

Наконец, следует обратить внимание читателей этого учебного пособия и слушателей соответствующих лекций еще на одно обстоятельство. В последнее время возрастает интерес к микромеханике и даже к наномеханике. Создается впечатление, что эта область механики должна быть отдана теории Коссера, теории Миндлина или, наконец, теории Грина-Ривлина. Если применять классическую теорию, теорию Коссера, теорию Миндлина, теорию Грина-Ривлина к исследованию поликристаллического металла то следует иметь в виду, что все они представляют собой некоторые теории, основанные на осредненном описании движения.

Есть, конечно, и альтернатива всем этим подходам. Можно опуститься на микроуровень и изучать отдельные элементы структуры и рассматривать их взаимодействие между собой. Так поступают физики при рассмотрении поликристаллических металлов. Мы можем спуститься до уровня каждого отдельного кристаллита и изучать их взаимодействие с соседними. Бурное развитие вычислительной техники делает этот подход доступным и перспективным.

При таком подходе объектом исследования становятся отдельные кристаллиты поликристаллического металла. А у каждого кристаллита имеются свои, присущие ему, элементы структуры, например, молекулы или макромолекулы. Очевидно, что размер этих элементов меньше размеров кристаллита.

К исследованию кристаллита можно применять любую теорию — и классическую, и теорию Коссера, и теорию Миндлина и даже теорию Грина-Ривлина. Но мы-то уже знаем, что различие в результатах, полученных по различным теориям, будут ничтожными, если размер кристаллита много больше характерного параметра материала

кристаллита. Но теперь это уже размер элемента структуры кристаллита, который, конечно, меньше характерных размеров самого кристаллита. Итак, в этом случае классическая механика дает вполне удовлетворительные результаты, если мы ограничиваемся размерами порядка характерных размеров кристаллита. Ну а если необходимо получить информацию об объемах кристаллита, имеющих размеры порядка элементов структуры кристаллита, то можно еще раз опуститься на еще более низкий уровень. Здесь опять следует использовать классическое решение, основанное на концепции бестелесной материальной точки. В этом состоит сила и важность классической механики. Можно сделать несколько таких опусканий на новый более низкий уровень и каждый раз использовать классическую механику. Сколько таких опусканий можно сделать зависит от конкретной проблемы. Есть ли предел таким опусканиям? Думаю, что нет! Однако, встретятся усложнения, связанные с учетом теплового движения: на каком-то уровне классическое истолкование температуры окажется неудовлетворительным.

Итак, механика, основанная на классической концепции материальной точки, способной только перемещаться, может давать ответы на возникающие у исследователей вопросы. Для чего же тогда нужна теория Коссера, основанная на концепции материального тела-точки? Конечно, она тоже полезна, если на каком-то уровне недостаточно классического описания движения. Однако, как следует из всего, сказанного выше, без нее можно обойтись. Еще более этот вывод относится к теории Миндлина и теории Грина-Ривлина.

1.2. Применение понятия сплошной среды в механике деформируемых тел

Как уже упоминалось в первом разделе этой главы, реальные тела имеют дискретное строение. Они состоят из молекул, атомов, электронов, протонов, нейтронов и даже более мелких частиц. Классическая механика деформируемых тел отвлекается от этого важного их физического свойства и заменяет реальное тело идеальным объектом — сплошной средой. Под сплошной средой понимается совокупность материальных точек, непрерывно заполняющих пространство и находящихся в движении.

Так было давно, недавно [7] и даже предполагается сейчас [8]. Введенная абстракция от реальности вполне приемлема и оказывается очень полезной, когда в деформируемом теле происходят явления, которые охватывают большие объемы, значительно превосходящие размеры молекул, атомов, кластеров и т. д. При этом вводится очень важное предположение: свойства больших кусков деформируемого тела не изменяются при дроблении их на сколь угодно малые кусочки. Это предположение явно противоречит физическим представлениям о структуре реальных тел. Однако, оно оказывается чрезвычайно полезным при изучении деформируемых тел, поскольку позволяет применять такие важные разделы математики, как теория пределов, теория непрерывных функций и возвышающиеся над ними дифференциальное и интегральное исчисление. Естественно, что предполагается, что те бесконечно малые величины, которые встречаются в механике деформируемых тел имеют размеры, значительно превосходящие молекулярные или размеры l , характерные для материалов. Это, если угодно, призыв к терпимости: малые с одной точки зрения величины, с другой точки зрения оказываются большими.

Рассмотрим некоторую материальную точку M деформируемого тела. Ее движение можно задать так (рис. 1.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M(t). \quad (1.1)$$

Предполагаем, что каждой материальной точке деформируемого тела соответствует вполне определенное и единственное положение \mathbf{r} в момент времени t и наоборот, каждому значению \mathbf{r} в момент t соответствует вполне определенная и единственная материальная точка. Это предположение означает во-первых, что функция в (1.1) является однозначной функцией времени. Это чрезвычайно ограничительное предположение, так что те случаи, когда оно нарушается, требуют специального рассмотрения. Неоднозначность действительно проявляется в (1.1), например, когда происходит разрушение тела, т. е. разделение его на две и более частей.

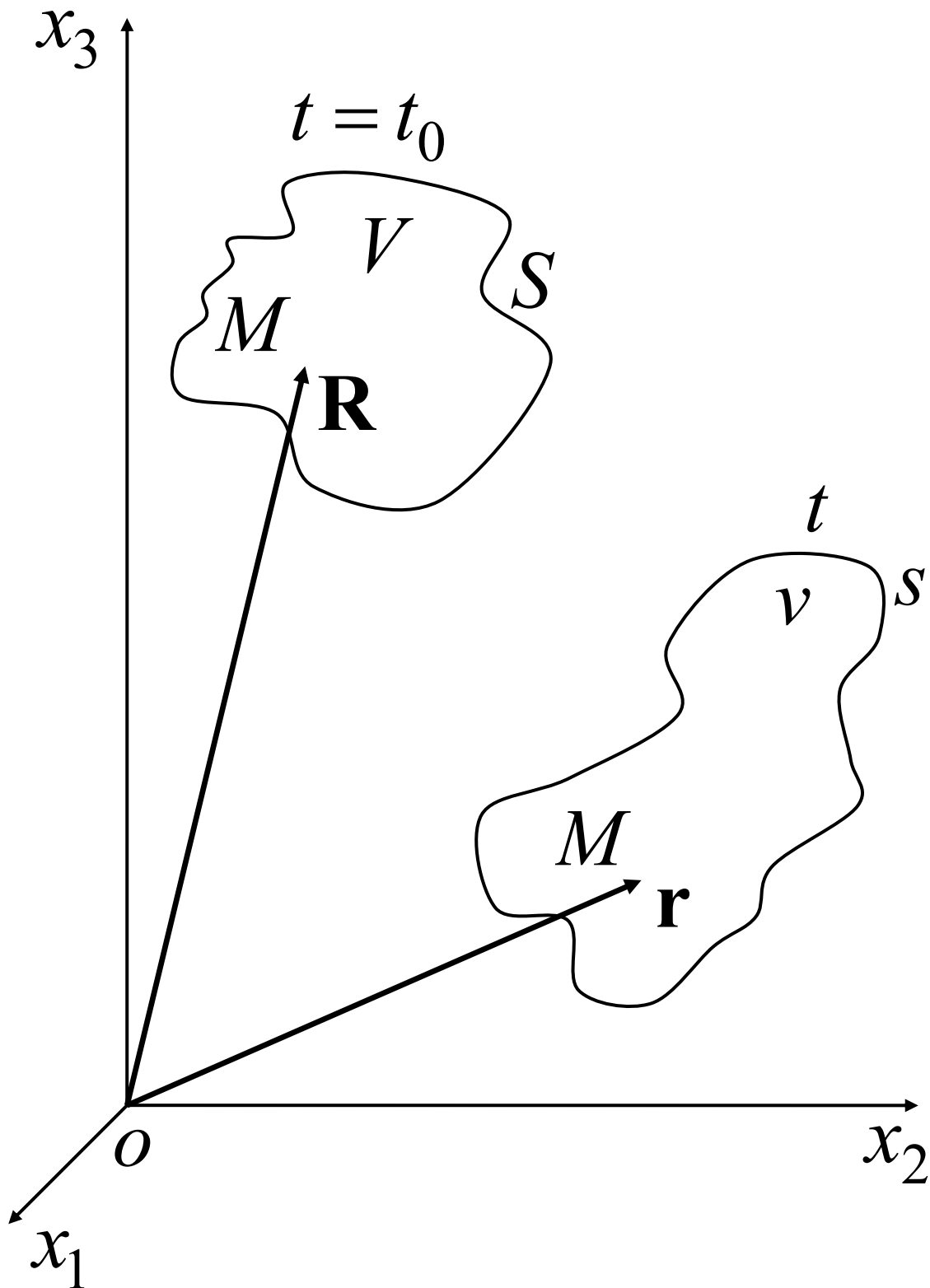


Рис. 1.1. Положения материальной точки в момент времени t и в начальный момент времени $t = t_0$

Материальные точки, которые до разрушения соседствовали, после разрушения тела оказываются на поверхностях осколков, а поскольку осколки движутся независимо друг от друга, положения соседствовавших до разрушения материальных точек оказываются совершенно различными!

Введенное выше предположение является, во-вторых, ограничительным потому, что отвергает возможность сначала независимого движения двух материальных точек и затем их слияния и последующего совместного движения. Пример такого движения — соударение двух тел. Так что и эта ситуация должна быть рассмотрена специально.

Итак, мы принимаем предположение о том, что существует взаимно однозначное соответствие между материальными точками и положениями, ими занимаемыми. Оно очень полезно тем, что позволяет индивидуализировать материальные точки по их положениям в какой-нибудь определенный момент времени.

Индивидуализируем материальные точки по их положению

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}$$

в момент времени $t = t_0$. В соответствии с этим способом индивидуализации мы говорим о той материальной точке M , которая в начальный момент времени расположена в точке пространства с радиус-вектором \mathbf{R} . Каждой материальной точке соответствует свое \mathbf{R} . Этот факт позволяет исключить название точки M из (1.1) и ввести вместо него ее начальную координату \mathbf{R} . Приходим к описанию движения в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t). \quad (1.2)$$

У нас появилась функция двух переменных. Выясним, какими свойствами она обладает. В соответствии со сказанным выше это — однозначная функция, но теперь уже не только времени, но и пространственной координаты \mathbf{R} . Но этого совершенно недостаточно. Уже в этом параграфе понадобятся производные по времени и значит, придется принять предположение о том, что функция (1.2) имеет производные нужного порядка по времени. Далее, уже в следующем параграфе нам придется использовать соображение о близости материальных точек: если некоторые две материальные точки располагались близко в начальный момент времени, то и в последующие

моменты времени они будут располагаться близко. Это заставляет предположить, что функция (1.2) непрерывна, и более того, дифференцируема по пространственной координате. Однако, задумаемся над тем, отражает ли последнее предположение некоторое свойство, присущее движению деформируемых тел вообще? Ответ очевиден: конечно нет! Общеизвестно, что при пластической деформации металлов и при движении идеальной жидкости материальные точки, которые в начальный момент находились в непосредственной близости, в последующие моменты могут разойтись сколь угодно далеко! Как же быть? Мы уже знаем как! Следует предположить, что функция (1.2) кусочно-непрерывна и даже кусочно-дифференцируема и специально рассмотреть случаи, когда имеются разрывы. Страшный но важный случай наличия разрывов везде и всегда не рассматриваем, ибо это заведет нас очень далеко!

Допустим, что в начальный момент времени некоторая совокупность точек расположена в некотором объеме V (рис 1.1). При последующем движении этих материальных точек в соответствии с формулой (1.2) они попадут в некоторый объем v ; последний также изображен на рис 1.1. Очевидно, что в нем окажутся только те материальные точки, которые были в V : никаких новых материальных точек не прибавится, но и никакие материальные точки не потеряются! Это рассуждение приводит к понятию материального тела. Материальное тело — это совокупность одних и тех же материальных точек. В разные моменты времени материальное тело пребывает в различных конфигурациях. В момент $t = t_0$ оно занимает объем V с ограничивающей его поверхностью S , а в текущий момент t — объем пространства v с ограничивающей поверхностью s .

Замечание 1.1. В наших формулах используются два различных радиус-вектора одной и той же материальной точки: начальный и текущий. Они пока различаются только тем, что радиус-вектор начального положения обозначается большой буквой \mathbf{R} , а радиус-вектор текущего положения — маленькой буквой \mathbf{r} . Такая система обозначений принята во всем мире. А вот в России и ранее в СССР обозначения совершенно другие: большим \mathbf{R} обозначается радиус-вектор текущего положения

материальной точки, а маленьким \mathbf{r} — радиус-вектор начального положения. Мы будем продолжать следовать мировым стандартам.

Замечание 1.2. Оба вектора \mathbf{R} и \mathbf{r} заданы в одной и той же системе координат $ox_1x_2x_3$ или в какой-нибудь другой, возможно, криволинейной, но тоже в одной системе координат. Важно различать координаты этих различных векторов. Мы будем писать

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_k x_k, \quad \mathbf{R} = \mathbf{i}_l \overset{\circ}{x}_l, \quad (1.3)$$

так что \mathbf{i}_k — базисные векторы единой неподвижной прямолинейной ортогональной декартовой системы координат, x_k — координаты радиус-вектора текущего положения \mathbf{r} , а $\overset{\circ}{x}_l$ — координаты радиус-вектора начального положения \mathbf{R} . Такое различие обязательно нужно использовать. Более того в последующем появится необходимость использовать операторы Гамильтона

$$\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{i}_l \frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}_l} \quad (1.4)$$

относительно этих двух разных координат.

Описанный выше подход к индивидуализации материальных точек носит название лагранжева подхода. Более того, координаты $\overset{\circ}{x}_l$ носят название лагранжевых координат.

Замечание 1.3. Судя по литературным источникам такой подход был введен Эйлером в 1762 году, а вовсе не Лагранжем.

Из множества альтернативных подходов к индивидуализации рассматриваем так называемый эйлеров подход. Здесь материальные точки индивидуализируются по их положению в текущий момент. Более того, x_k носят название эйлеровых координат.

Замечание 1.4. Судя по литературным источникам такой подход был введен Д'Аламбером в 1752 году, а вовсе не Эйлером. Отмеченное несоответствие в названиях подходов не должно смущать читателя: названия иногда даются не для того, чтобы отметить историческую справедливость, а просто для того, чтобы увековечить чье-нибудь знаменитое имя. Так делают почти всегда и почти везде.

Напоминаю, что текущее положение материальной точки обозначено \mathbf{r} . Как же в этом случае вообще описать движение? Ведь \mathbf{r} — уже текущая координата! Это действительно так, но можно рассматривать (1.2), как неявную функцию, задающую радиус-вектор начального положения \mathbf{R} . Обращая (1.2), получим

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t). \quad (1.5)$$

Из теории неявных функций известно, что условие существования обращения (1.2) имеет вид

$$\left| \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right| \neq 0. \quad (1.6)$$

Полагаем, что оно выполняется.

Замечание 1.5. Можно встать на другую позицию и рассматривать (1.5), опять таки, как неявную функцию, задающую теперь \mathbf{r} по известному \mathbf{R} . Условие обращения (1.5) имеет вид

$$|\nabla \mathbf{R}| \neq 0. \quad (1.7)$$

Полагаем, что и оно выполняется.

Найдем теперь скорость материальной точки. При лагранжевом подходе та или иная материальная точка фиксируется заданием \mathbf{R} . А это означает, что в процессе движения материальной точки радиус-вектор ее начального положения \mathbf{R} остается постоянным. А это, в свою очередь, означает, что скорость материальной точки должна находиться, как частная производная от (1.2).

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.8)$$

По аналогии находится и ускорение

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.9)$$

Обратимся теперь к эйлеровому подходу. Как найти скорость \mathbf{v} материальной точки, если известен закон ее движения (1.5)? За время движения dt ее перемещение будет равно $d\mathbf{r}$, тогда как лагранжева переменная \mathbf{R} останется постоянной, так что

$$d\mathbf{R} = 0.$$

Подставляя сюда выражение \mathbf{R} по (1.5) находим

$$d\mathbf{R} = (\mathbf{R}\nabla) \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} dt = 0,$$

или

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{R}) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} dt = 0.$$

Отсюда легко находим

$$d\mathbf{r} = -(\mathbf{R}\nabla)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} dt = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot (\nabla \mathbf{R})^{-1} dt. \quad (1.10)$$

Поделив левую и правую части на dt , получим скорость

$$\mathbf{v} = -(\mathbf{R}\nabla)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot (\nabla \mathbf{R})^{-1}.$$

В обоих случаях скорость \mathbf{v} оказывается, в силу (1.5), выраженной через эйлеровы переменные, так что имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (1.11)$$

Вычислим теперь ускорение. За время dt материальная точка переместится на $d\mathbf{r}$, так что приращение скорости этой точки будет таким:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (\mathbf{v}\nabla) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{v}).$$

Поделив это приращение скорости на dt , получим ускорение материальной точки

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\nabla \mathbf{v}). \quad (1.12)$$

Вспомнив теперь, что

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt, \quad (1.13)$$

получим из (1.12) выражение ускорения

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}). \quad (1.14)$$

Первые слагаемые в правых частях представляют так называемое локальное ускорение, а вторые — конвективное. Первые слагаемые представляют ускорение, вызванное локальным изменением скорости в точке с эйлеровой координатой \mathbf{r} , тогда как вторые — образуют ускорение, вызванное изменением скорости, происходящим за счет движения этой материальной точки со скоростью \mathbf{v} .

Выражение (1.12) дает основание для введения материальной производной от некоторого свойства \mathbf{M}

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\mathbf{M}\nabla) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\nabla \mathbf{M}).$$

С учетом (1.13) эта материальная производная принимает выражение

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + (\mathbf{M}\nabla) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{M}). \quad (1.15)$$

С механической точки зрения введенная материальная производная характеризует скорость изменения во времени некоторого свойства (скалярного, векторного или тензорного) в материальной точке, радиус-вектор текущего положения которой равен \mathbf{r} . Например, материальная производная вектора скорости \mathbf{v} , в силу (1.14), равна ускорению материальной точки.

В качестве примера вычислим материальную производную диады \mathbf{ab} . По первой формуле (1.15) приходим к следующему результату

$$(\mathbf{ab})' = \frac{\partial \mathbf{ab}}{\partial t} + (\mathbf{ab}\nabla) \cdot \mathbf{v}.$$

Частную производную по времени вычислим по правилу Лейбница дифференцирования произведения

$$\frac{\partial \mathbf{ab}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t},$$

а второе слагаемое вычислим по правилу работы с оператором Гамильтона (см. гл. 2 учебного пособия [9]).

$$(\mathbf{ab}\nabla) \cdot \mathbf{v} = \left(\left(\begin{array}{c} \downarrow \leftarrow \\ \mathbf{a} \ \mathbf{b} \\ \uparrow \end{array} \right) \nabla \right) \cdot \mathbf{v} + \left(\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \mathbf{a} \ \mathbf{b} \\ \leftarrow \end{array} \right) \nabla \right) \cdot \mathbf{v} = ((\mathbf{a}\nabla) \cdot \mathbf{v}) \mathbf{b} + \mathbf{a} ((\mathbf{b}\nabla) \cdot \mathbf{v}).$$

Все эти действия приводят к следующему результату

$$(\mathbf{ab})' = \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{a}\nabla) \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{b} + \mathbf{a} \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{b}\nabla) \cdot \mathbf{v} \right).$$

В скобках обнаруживаем материальную производную векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , так что имеем окончательно

$$(\mathbf{ab})' = \dot{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}.$$

Эта формула демонстрирует, что правило Лейбница для дифференцирования произведения распространяется и на материальную производную.

Аналогично находим

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})' = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}}, \quad (\mathbf{AB})' = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{B} + \mathbf{A} \dot{\mathbf{B}}.$$

1.3. Деформация и поворот окрестности материальной точки

Рассмотрим теперь две близкие материальные точки M и N. Они показаны на рис 1.2, как в текущий момент времени, так и в начальный. Вектор, соединяющий их в текущий момент времени обозначен $d\mathbf{r}$, тогда как вектор, соединяющий их в момент времени $t = t_0$ обозначен $d\mathbf{R}$.

Напоминаем, что движение материального тела задается формулой (1.2)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t).$$

Дифференциал в (1.2) при фиксированном времени t имеет выражение

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot d\mathbf{R}. \quad (1.16)$$

Здесь появился тензор $\left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)^T$, который в литературе называется градиентом деформации. Мы будем называть его градиентом вектора места или просто градиентом места. Он связывает векторы малых материальных отрезков в начальный и текущий моменты времени.

Представим тензор $\left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)$ в форме полярного разложения

$$\left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V}, \quad (1.17)$$

где \mathbf{U} и \mathbf{V} симметричные положительно определенные тензоры, а \mathbf{O} ортогональный тензор (поворот, отражение либо, наконец, комбинация их).

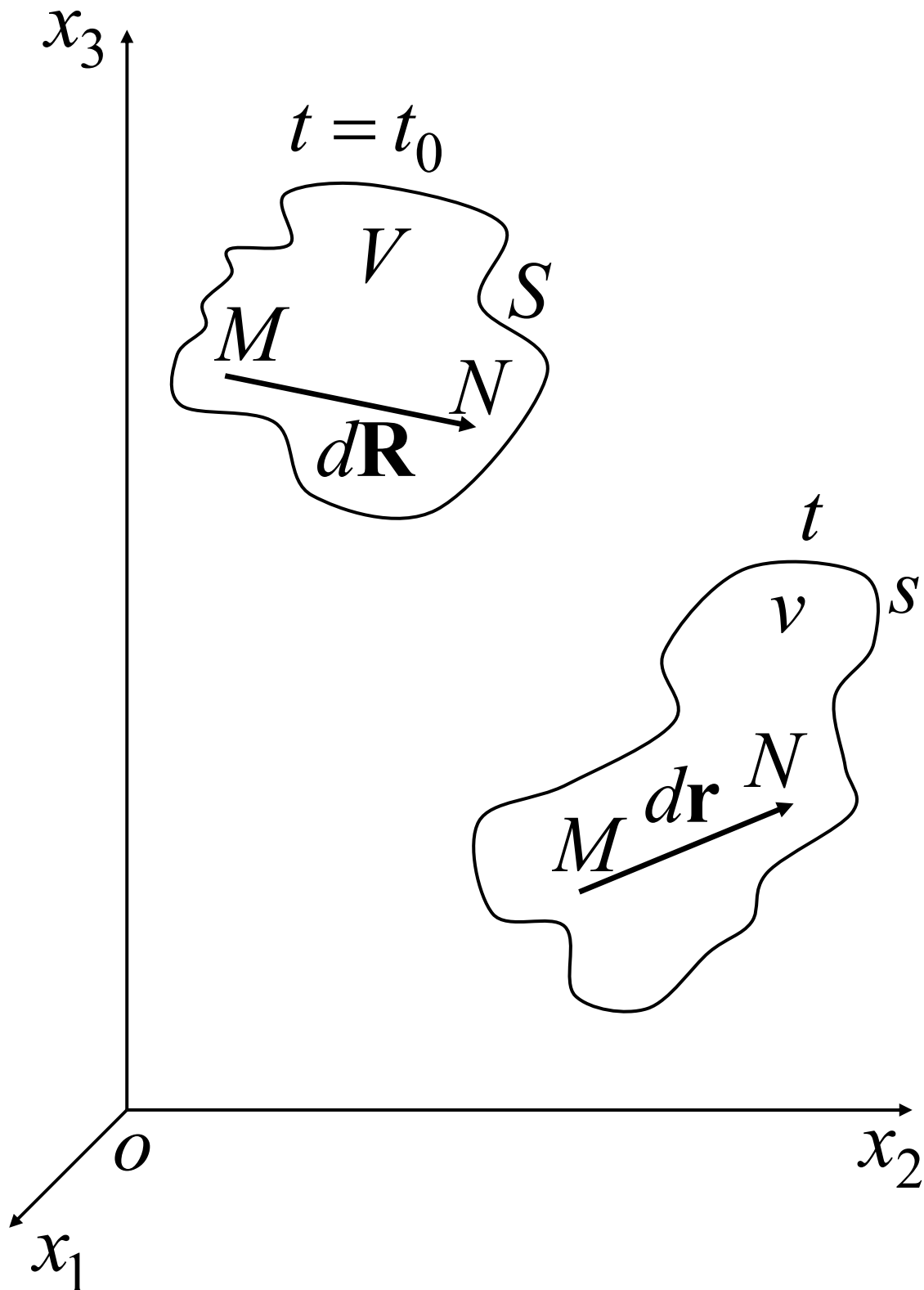


Рис. 1.2. Бесконечно малый материальный отрезок $d\mathbf{r}$ в момент времени t и в начальный момент времени $t = t_0$

Транспонируя (1.17), находим

$$\left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}. \quad (1.18)$$

Перемножая (1.17) и (1.18) в разных последовательностях, получаем следующие формулы

$$\mathbf{G} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{O}, \quad (1.19)$$

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{O}^T. \quad (1.20)$$

Из этих формул легко находим

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{G}} = \mathbf{G}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{O}^T. \quad (1.22)$$

Наконец, для тензора \mathbf{O} с помощью (1.17) и (1.18) находим два альтернативных представления

$$\mathbf{O} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{U}^{-1} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{G}^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{O} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) = \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right). \quad (1.24)$$

При эйлеровом подходе к описанию движения используем (1.5)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t).$$

Вычисляя дифференциал при фиксированном времени t , находим

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{R}) = (\mathbf{R} \nabla) \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.25)$$

Обращая, получаем формулу

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} \cdot (\nabla \mathbf{R})^{-1} = (\mathbf{R} \nabla)^{-1} \cdot d\mathbf{R}. \quad (1.26)$$

Сравнивая ее с (1.16), находим

$$\left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = (\nabla \mathbf{R})^{-1}, \quad (\nabla \mathbf{R}) = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)^{-1}, \quad (1.27)$$

что с учетом полярного разложения (1.18) дает полярное разложение для тензора $\nabla \mathbf{R}$

$$\nabla \mathbf{R} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}^{-1}. \quad (1.28)$$

Транспонирование дает

$$(\nabla \mathbf{R})^T = (\mathbf{R} \nabla) = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O}^T. \quad (1.29)$$

Перемножая (1.28) и (1.29) в разных последовательностях, находим

$$\mathbf{g} = (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R} \nabla) = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{m} = (\mathbf{R} \nabla) \cdot (\nabla \mathbf{R}) = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-2}. \quad (1.31)$$

Наконец, и при эйлеровом подходе с помощью (1.28) находим еще два новых представления ортогонального тензора \mathbf{O}

$$\mathbf{O} = \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{R}), \quad \mathbf{O} = (\nabla \mathbf{R}) \cdot \mathbf{U}. \quad (1.32)$$

При наших рассуждениях появилось шесть симметричных положительно определенных тензоров.

Тензор \mathbf{G} — носит название — мера деформации Коши-Грина.

Тензор \mathbf{F} — носит название — мера деформации Фингера.

Тензор \mathbf{g} — носит название — мера деформации Альманси.

Тензор \mathbf{m} специального названия не имеет.

Тензоры \mathbf{U} и \mathbf{V} носят названия — правый и левый тензоры искажений в разложениях градиента деформации $\left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)^T$.

Это находится в полном соответствии с определением (1.18) полярного разложения тензора $\left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)^T = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right)$.

Между ними существуют связи (1.21) и (1.22). Кроме этого из (1.20) и (1.30) усматриваем

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}^{-1}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{m}^{-1}. \quad (1.33)$$

Выясним характер движения окрестности некоторой материальной точки. Для этого зададим тензоры искажений в своих главных базисах

$$\mathbf{U} = \mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} U_k, \quad \left(\begin{array}{c} \Sigma \\ k \end{array} \right). \quad (1.34)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{V(k)} V_k, \quad \left(\begin{array}{c} \Sigma \\ k \end{array} \right). \quad (1.35)$$

Здесь U_k и V_k — главные значения тензоров искажений \mathbf{U} и \mathbf{V} . В соответствии со сказанным выше о том, что тензоры \mathbf{U} и \mathbf{V} — положительные тензоры, можем считать, что U_k и V_k — положительны. С помощью полярного разложения (1.17) находим связь \mathbf{U} и \mathbf{V} .

$$\mathbf{V} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^T. \quad (1.36)$$

Подставив сюда разложения (1.34) и (1.35), получим уравнение

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{V(k)} V_k = \left(\mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_{U(k)} \right) \left(\mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_{U(k)} \right) U_k, \quad \left(\begin{matrix} \Sigma \\ k \end{matrix} \right). \quad (1.37)$$

Оба разложения представляют разложения одного и того же тензора искажений \mathbf{V} по элементам главного базиса. Поэтому заключаем, что главные значения обоих тензоров искажений равны

$$V_k = U_k, \quad (1.38)$$

а главный векторный базис тензора \mathbf{V} представляет повернутый базис тензора \mathbf{U}

$$\mathbf{e}_{V(k)} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_{U(k)}, \quad (1.39)$$

так что \mathbf{O} выражает поворот от главного базиса тензора \mathbf{U} к главному базису тензора \mathbf{V}

$$\mathbf{O} = \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{U(k)}. \quad (1.40)$$

Если подставить разложения (1.34) и (1.35) в (1.19), (1.20), (1.30) и (1.31), то получим

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} U_k^2, \quad \left(\begin{matrix} \Sigma \\ k \end{matrix} \right), \quad (1.41)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{V(k)} V_k^2, \quad \left(\begin{matrix} \Sigma \\ k \end{matrix} \right), \quad (1.42)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{V}^{-2} = \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{V(k)} V_k^{-2}, \quad \left(\begin{matrix} \Sigma \\ k \end{matrix} \right), \quad (1.43)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{U}^{-2} = \mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} U_k^{-2}, \quad \left(\begin{matrix} \Sigma \\ k \end{matrix} \right). \quad (1.44)$$

Из этих формул видим, что главные базисы тензоров \mathbf{U}, \mathbf{G} и \mathbf{m} совпадают. Точно так же совпадают главные базисы тензоров \mathbf{V}, \mathbf{F} и \mathbf{g} . Из этих же формул и (1.38) видно, что главные значения тензоров \mathbf{G} и \mathbf{F} равны и равны квадратам главных значений тензоров искажений и т. д.

В силу (1.40) тензор \mathbf{O} представляет также поворот от главного базиса тензора \mathbf{G} к главному базису тензора \mathbf{F} или \mathbf{g} !

Проследим теперь за движением отрезка $d\mathbf{R}$ и зададим его в главном базисе тензора \mathbf{U} , так что

$$d\mathbf{R} = \mathbf{e}_{U(l)} d\overset{\circ}{x}_l. \quad (1.45)$$

В текущий момент времени t он займет положение

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \cdot d\mathbf{R}. \quad (1.46)$$

Подставив сюда $d\mathbf{R}$ по (1.45) и представление (1.34), получим

$$d\mathbf{r} = \mathbf{O} \cdot \left(\mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} U_k \right) \cdot \left(\mathbf{e}_{U(l)} d\overset{\circ}{x}_l \right) = \mathbf{O} \cdot \left(\mathbf{e}_{U(k)} U_k d\overset{\circ}{x}_k \right), \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_k \right). \quad (1.47)$$

Эта формула допускает следующее истолкование: проекции вектора $d\mathbf{R}$ на оси $\mathbf{e}_{U(k)}$, равные $d\overset{\circ}{x}_k$, сначала изменяют свою длину пропорционально U_k , так что получается вектор, стоящий в скобках (1.47), и потом весь этот вектор поворачивается (или отражается) в соответствии с тем, что указывает тензор \mathbf{O} .

Возможно и другое истолкование движения. Для этого следует записать формулу (1.46) по-другому, подставив в нее второе разложение (1.18)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O} \cdot d\mathbf{R}. \quad (1.48)$$

В соответствии с этим соотношением вектор $d\mathbf{R}$, заданный формулой (1.45), сначала испытывает поворот (или отражение) \mathbf{O} , заданный выражением (1.40). Получается повернутый вектор

$$\mathbf{O} \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{U(k)} \cdot \mathbf{e}_{U(l)} d\overset{\circ}{x}_l = \mathbf{e}_{V(k)} d\overset{\circ}{x}_k.$$

А теперь этот повернутый вектор испытывает искажение так, что проекции на каждую ось $\mathbf{e}_{V(l)}$ испытывают изменение длины, пропорциональное $V_l = U_l$. Так находится текущее положение вектора, занимавшего вначале положение $d\mathbf{R}$ по (1.45)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_{V(l)} V_l d\overset{\circ}{x}_l, \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_l \right). \quad (1.49)$$

Таким образом, мы пришли к заключению, что каждый материальный отрезок в деформируемом теле испытывает некоторый поворот (во всяком случае ортогональное преобразование) \mathbf{O} и искажение \mathbf{U} или \mathbf{V} . Последние выражаются через меры деформации Коши-Грина и Фингера с использованием операции извлечения квадратного корня из тензора в соответствии с формулами (1.21). Более удобно использовать непосредственно меры деформации Коши-Грина \mathbf{G} или Фингера \mathbf{F} . Поэтому представляет большой интерес знание механического смысла координат мер деформации.

1.4. Удлинения и сдвиги в деформируемом теле

Опять обращаемся к рис. 1.2 и рассматриваем материальный отрезок MN в два разных момента времени: начальный и текущий момент t . Положим, что в начальный момент он имел длину dL и был направлен вдоль одной из осей координат, так что

$$d\mathbf{R} = \mathbf{i}_k dL.$$

В текущий момент времени радиус-вектор этого отрезка находится по формуле (1.16)

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot d\mathbf{R} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{i}_k dL = d\mathbf{R} \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \mathbf{i}_k \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) dL. \quad (1.50)$$

Квадрат длины этого материального отрезка в текущий момент времени равен

$$dl^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i}_k \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) dL \right) \cdot \left(\left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{i}_k dL \right) = \mathbf{i}_k \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{i}_k dL^2, \quad \left(\begin{array}{c} \cancel{\mathcal{Z}} \\ k \end{array} \right).$$

В правой части обнаруживается мера деформации Коши-Грина, так что

$$dl^2 = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_k dL^2, \quad \left(\begin{array}{c} \cancel{\mathcal{Z}} \\ k \end{array} \right).$$

Вычислив, найдем, что сюда вошла лишь одна диагональная координата тензора \mathbf{G} .

$$dl^2 = G_{kk} dL^2, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right).$$

Отсюда легко находим отношение длин материального отрезка MN в текущий и в начальный моменты времени

$$\frac{dl}{dL} = \sqrt{G_{kk}}, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right). \quad (1.51)$$

Относительное удлинение MN при переходе от начального положения к текущему имеет выражение

$$\delta_k = \frac{dl - dL}{dL} = \sqrt{G_{kk}} - 1, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right). \quad (1.52)$$

Вывод таков: диагональные координаты меры деформации Коши-Грина определяют относительное удлинение таких материальных отрезков, которые в начальный момент времени были параллельны осям координат.

Обратимся теперь к рис. 1.3. На нем изображено два материальных отрезка: MN и MP. Как и ранее предполагаем, что они имеют длины dL' и dL'' и направлены вдоль осей координат, так что в начальный момент времени эти материальные отрезки имеют представления

$$d\mathbf{R}' = \mathbf{i}_k dL', \quad d\mathbf{R}'' = \mathbf{i}_r dL'', \quad \mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_r.$$

В текущий момент времени эти материальные отрезки займут положения, которые определяются по формуле (1.16)

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{R}' \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \mathbf{i}_k \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) dL',$$

$$d\mathbf{r}'' = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot d\mathbf{R}'' = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{i}_r dL''.$$

Скалярное произведение этих величин равно

$$d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}'' = dl' dl'' \cos \varphi = \mathbf{i}_k \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{i}_r dL' dL''.$$

Здесь уже усматривается мера деформации Коши-Грина \mathbf{G} , более того, всего лишь одна ее координата G_{kr} , так что получаем

$$\cos \varphi_{kr} = G_{kr} \frac{dL' dL''}{dl' dl''}.$$

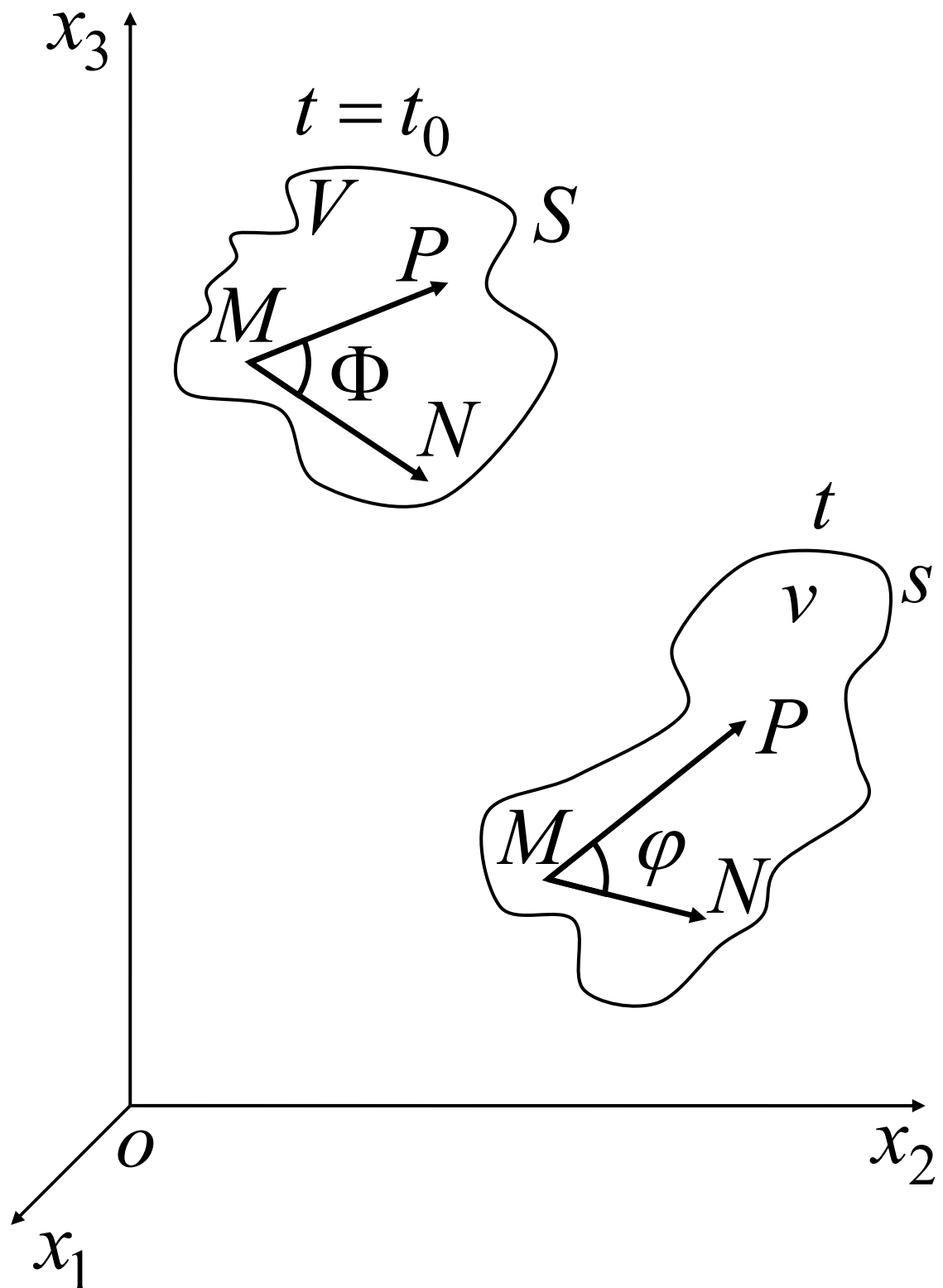


Рис. 1.3. Углы между двумя бесконечно малыми материальными отрезками в момент времени t и в начальный момент времени $t = t_0$

Внося сюда отношения длин отрезков по формулам (1.51), получаем, окончательно

$$\cos \varphi_{kr} = \frac{G_{kr}}{\sqrt{G_{kk}G_{rr}}}. \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k,r \end{array} \right) \quad (1.53)$$

Отсюда уже усматривается механический смысл недиагональных координат G_{kr} меры деформации Коши-Грина: они определяют в текущий момент времени косинусы углов между такими материальными отрезками, которые в начальный момент времени были параллельны разным осям координат.

Встанем теперь на позиции эйлера подхода и будем рассматривать отрезок MN на рис. 1.2, который в текущий момент имеет длину dl и направлен вдоль одной из осей координат. Имеем

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}_k dl.$$

В начальный момент времени радиус-вектор этого материального отрезка найдется по формуле (1.25), так что получим

$$d\mathbf{R} = (\mathbf{R}\nabla) \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{R}\nabla) \cdot \mathbf{i}_k dl = d\mathbf{r} \cdot (\nabla\mathbf{R}) = \mathbf{i}_k \cdot (\nabla\mathbf{R}) dl.$$

Квадрат длины этого материального отрезка в начальный момент равен

$$dL^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = (\mathbf{i}_k \cdot (\nabla\mathbf{R})) \cdot ((\mathbf{R}\nabla) \cdot \mathbf{i}_k) dl^2 = \mathbf{i}_k \cdot (\nabla\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R}\nabla) \cdot \mathbf{i}_k dl^2, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right).$$

Здесь уже усматривается мера деформации Альманси, более того, всего лишь одна координата ее. Так что имеем

$$dL^2 = g_{kk} dl^2, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right).$$

Отношение длин в текущий и начальный моменты времени равно

$$\frac{dl}{dL} = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right). \quad (1.54)$$

Наконец, находим удлинение этого отрезка при переходе от начального к текущему его положению

$$\delta_k = \frac{dl - dL}{dL} = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} - 1, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right). \quad (1.55)$$

Заключение таково: диагональные координаты меры деформации Альманси определяют относительное удлинение таких материальных

отрезков, которые в текущий момент времени оказались параллельными координатным осям.

Опять обратимся к рис. 1.3. На нем изображено два материальных отрезка: MN и MP. Положим, что в текущий момент они имеют направления \mathbf{i}_k и \mathbf{i}_r и длины dl' и dl'' . Так что имеем для текущего момента

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_k dl', \quad d\mathbf{r}'' = \mathbf{i}_r dl'', \quad k \neq r.$$

В начальный момент времени эти материальные отрезки занимали положение, которое определяется по формуле (1.25)

$$d\mathbf{R}' = d\mathbf{r}' \cdot (\nabla \mathbf{R}) = \mathbf{i}_k \cdot (\nabla \mathbf{R}) dl',$$

$$d\mathbf{R}'' = (\mathbf{R} \nabla) \cdot d\mathbf{r}'' = (\mathbf{R} \nabla) \cdot \mathbf{i}_r dl''.$$

Скалярное произведение этих векторов равно

$$d\mathbf{R}' \cdot d\mathbf{R}'' = dL' dL'' \cos \Phi_{kr} = \mathbf{i}_k \cdot (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R} \nabla) \cdot \mathbf{i}_r dl' dl''.$$

Здесь в правой части обнаруживается мера деформации Альманси (1.30), более того, всего лишь одна ее координата g_{kr} . Учитывая дополнительно выражения (1.54), найдем следующее выражение для косинуса угла между введенными материальными отрезками в начальный момент времени

$$\cos \Phi_{kr} = \frac{g_{kr}}{\sqrt{g_{kk} g_{rr}}}, \quad \left(\begin{matrix} \cancel{g} \\ k, r \end{matrix} \right). \quad (1.56)$$

Таким образом, недиагональные координаты g_{kr} меры деформации Альманси определяют в начальный момент времени косинусы углов между такими материальными отрезками, которые в текущий момент оказались параллельными разным координатным осям.

1.5. Объемная деформация

Обратимся к рис. 1.4 На нем изображен прямоугольный параллелепипед, имеющий материальные ребра, параллельные осям координат в текущий момент и равные

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_1 dx_1, \quad d\mathbf{r}'' = \mathbf{i}_2 dx_2, \quad d\mathbf{r}''' = \mathbf{i}_3 dx_3. \quad (1.57)$$

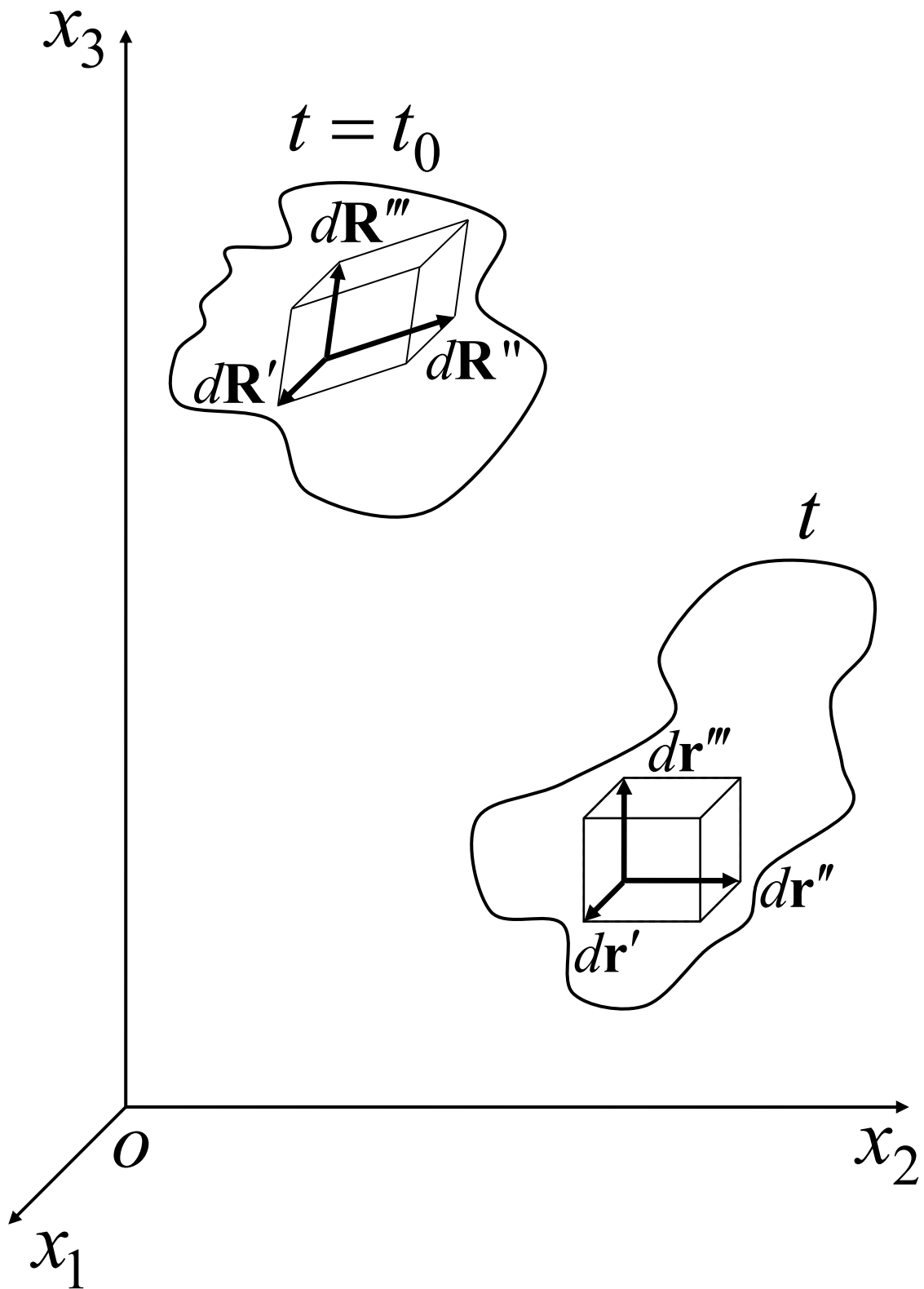


Рис. 1.4. Бесконечно малый материальный параллелепипед в момент времени t и в начальный момент времени $t = t_0$

Кроме того на этом же рисунке изображен параллелепипед, построенный на тех же самых отрезках, но в начальный момент времени. Материальные ребра, соответствующие ребрам начального состояния также изображены на этом рисунке. Они обозначены $d\mathbf{R}'$, $d\mathbf{R}''$ и $d\mathbf{R}'''$. Используя эйлеров подход, найдем их по формуле (1.25)

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{R}).$$

Чтобы упростить вычисления, введем следующее обозначение

$$\nabla \mathbf{R} = \mathbf{A} = \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n A_{mn}. \quad (1.58)$$

Тогда получим из (1.25)

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n A_{mn}).$$

Подставляя сюда значения $d\mathbf{r}$ по (1.57), получим, соответственно

$$\begin{aligned} d\mathbf{R}' &= dx_1 A_{11} \mathbf{i}_1 + dx_2 A_{12} \mathbf{i}_2 + dx_3 A_{13} \mathbf{i}_3, \\ d\mathbf{R}'' &= dx_2 A_{21} \mathbf{i}_1 + dx_2 A_{22} \mathbf{i}_2 + dx_3 A_{23} \mathbf{i}_3, \\ d\mathbf{R}''' &= dx_3 A_{31} \mathbf{i}_1 + dx_3 A_{32} \mathbf{i}_2 + dx_3 A_{33} \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Сравним объемы параллелепипедов, построенных на материальных отрезках в текущий и начальный момент времени.

Очевидно, что объем материального параллелепипеда в текущем состоянии равен следующей величине

$$dv = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.60)$$

просто потому, что он прямоугольный по построению.

Соответствующий материальный параллелепипед начального состояния уже не является прямоугольным. Поэтому объем его придется вычислять по общей формуле

$$dV = d\mathbf{R}' \cdot (d\mathbf{R}'' \times d\mathbf{R}''').$$

Из математики известно, что объем также можно вычислить по формуле

$$dV = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ dx_1' & dx_2' & dx_3' \\ 0 & 0 & 0 \\ dx_1'' & dx_2'' & dx_3'' \\ 0 & 0 & 0 \\ dx_1''' & dx_2''' & dx_3''' \end{vmatrix}, \quad (1.61)$$

где введены обозначения для проекций векторов $d\mathbf{R}'$, $d\mathbf{R}''$ и $d\mathbf{R}'''$.

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{R}' &= d x_1' \mathbf{i}_1 + d x_2' \mathbf{i}_2 + d x_3' \mathbf{i}_3, \\
 d\mathbf{R}'' &= d x_1'' \mathbf{i}_1 + d x_2'' \mathbf{i}_2 + d x_3'' \mathbf{i}_3, \\
 d\mathbf{R}''' &= d x_1''' \mathbf{i}_1 + d x_2''' \mathbf{i}_2 + d x_3''' \mathbf{i}_3.
 \end{aligned}
 \tag{1.62}$$

Сравнивая (1.62) и (1.59), легко находим проекции векторов $d\mathbf{R}'$, $d\mathbf{R}''$ и $d\mathbf{R}'''$, и можем их сразу же подставить в (1.61). Тогда получим

$$dV = \begin{vmatrix} dx_1 A_{11}, & dx_1 A_{12}, & dx_1 A_{13} \\ dx_2 A_{21}, & dx_2 A_{22}, & dx_2 A_{23} \\ dx_3 A_{31}, & dx_3 A_{32}, & dx_3 A_{33} \end{vmatrix}.$$

Из первой строчки этого определителя можно вынести общий множитель dx_1 , из второй, соответственно dx_2 и, наконец, из третьей dx_3 . После всех этих манипуляций под знаком определителя останется только матрица A_{mn} .

Так что, получим, окончательно

$$dV = |A_{mn}| dx_1 dx_2 dx_3 = |\mathbf{A}| dx_1 dx_2 dx_3.$$

Вспоминая обозначения (1.58) и (1.60), найдем окончательно

$$dV = |\nabla \mathbf{R}| dv.
 \tag{1.63}$$

Напомним теперь представление меры деформации Альманси

$$\mathbf{g} = (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R} \nabla).$$

Вычисляя определитель, найдем

$$|\mathbf{g}| = |\nabla \mathbf{R}| |\mathbf{R} \nabla| = |\nabla \mathbf{R}|^2.
 \tag{1.64}$$

Таким образом, получаем следующее представление определителя

$$|\nabla \mathbf{R}| = \pm \sqrt{|\mathbf{g}|}.
 \tag{1.65}$$

Остается только разобраться со знаком. Во-первых, в силу неравенства (1.7) должен быть выбран только один какой-нибудь знак.

Во-вторых обратим внимание на начальное состояние. В нем имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{r},$$

и тогда при $t = t_0$ получим

$$|\nabla \mathbf{R}| = 1.$$

Итак, в начальный момент времени определитель $|\nabla \mathbf{R}|$ положителен и далее ни в какой момент времени он не обращается в нуль в силу предположения о характере движения (1.7). Следовательно, в (1.65) должен быть выбран только знак плюс. Так что, имеем

$$|\nabla \mathbf{R}| = \sqrt{|\mathbf{g}|}.$$

Остается вспомнить (1.63) и подставить туда полученное представление определителя. Придем к формуле

$$dV = \sqrt{|\mathbf{g}|} dv.$$

Отсюда получаем значение относительного объема

$$\frac{dv}{dV} = \left(\sqrt{|\mathbf{g}|}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \quad (1.66)$$

и значение относительной объемной деформации

$$\theta = \frac{dv - dV}{dV} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} - 1. \quad (1.67)$$

Замечание 1.6. Уравнение (1.64) и условие (1.7) гарантируют выполнение требования того, чтобы определитель $|\mathbf{g}|$ не становился отрицательным и формулы (1.66) и (1.67) не теряли бы своего смысла никогда.

Последние формулы этого раздела не являются единственными, дающими представление относительного объема и относительной объемной деформации через меры деформации. Чтобы убедиться в этом, вспомним формулу (1.27)

$$(\nabla \mathbf{R}) = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)^{-1}.$$

Если ее записать иначе

$$\left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot (\nabla \mathbf{R}) = \mathbf{E},$$

и вычислить определитель от обеих частей этого равенства, то найдем

$$|\nabla \mathbf{R}| = \left| \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right|^{-1}.$$

Вспомним теперь представления мер деформации Коши-Грина и Фингера (1.19) и (1.20).

$$\mathbf{G} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right),$$

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right).$$

Из этих формул находим

$$\left| \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right| = \sqrt{|\mathbf{G}|} = \sqrt{|\mathbf{F}|},$$

и значит, имеем новые формулы для относительного объема и объемной деформации

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{|\mathbf{G}|} = \sqrt{|\mathbf{F}|}, \quad (1.68)$$

$$\theta = \sqrt{|\mathbf{G}|} - 1 = \sqrt{|\mathbf{F}|} - 1. \quad (1.69)$$

1.6. Тензоры деформаций

Для представления перемещения материальной частицы из ее начального положения \mathbf{R} в текущее положение \mathbf{r} введем так называемый вектор перемещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}. \quad (1.70)$$

Его можно выразить, как через лагранжевы, так и через эйлеровы переменные. В первом случае имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{R} = \mathbf{u}(\mathbf{R}, t).$$

Во втором случае представление перемещения таково

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t).$$

Отсюда мы легко находим представление вектора текущего положения

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$$

и вектора начального положения

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t).$$

Подставив соответствующие представления в выражения мер деформации, получим

$$\mathbf{G} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) = \mathbf{E} + 2\mathbf{C}, \quad (1.71)$$

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \mathbf{E} + 2\mathbf{A}', \quad (1.72)$$

$$\mathbf{g} = (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R} \nabla) = \mathbf{E} - 2\mathbf{A}, \quad (1.73)$$

$$\mathbf{m} = (\mathbf{R} \nabla) \cdot (\nabla \mathbf{R}) = \mathbf{E} - 2\mathbf{C}', \quad (1.74)$$

причем здесь введены тензоры деформации:

тензор деформации Коши-Грина

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \overset{\circ}{\nabla} + \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \right) \cdot \left(\mathbf{u} \overset{\circ}{\nabla} \right) \right), \quad (1.75)$$

тензор деформации Фингера

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \overset{\circ}{\nabla} + \left(\mathbf{u} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \right) \right), \quad (1.76)$$

тензор деформации Альманси

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - (\nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \nabla) \right), \quad (1.77)$$

тензор деформации без имени

$$\mathbf{C}' = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - (\mathbf{u} \nabla) \cdot (\nabla \mathbf{u}) \right). \quad (1.78)$$

Замечательное свойство всех введенных деформаций и их важное отличие от мер деформации в том, что они обращаются в нуль, если перемещения равны нулю.

1.7. Мгновенное состояние движения и деформации

Этот раздел посвящен вычислению материальных производных от мер деформации. Начнем с меры деформации Коши-Грина, поскольку она выражена через Лагранжевы переменные. При вычислении материальной производной следует учесть, что Лагранжева координата материальной точки остается постоянной в процессе движения.

Воспроизвожу представление меры деформации Коши-Грина

$$\mathbf{G} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right),$$

и выполняю дифференцирование по времени при $\mathbf{R} = \text{const}$

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) + \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \overset{\circ}{\nabla} \right).$$

Но ведь по (1.8) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{R}, t), \quad (1.79)$$

а значит

$$\dot{\mathbf{G}} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} \right) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) + \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left(\mathbf{v} \overset{\circ}{\nabla} \right). \quad (1.80)$$

Воспользуемся представлением скорости через эйлерову переменную, как это сделано в (1.11)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Подставим сюда значение эйлеровой координаты \mathbf{r} по (1.2), получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(\mathbf{R}, t), t). \quad (1.81)$$

Теперь уже можно приступить к вычислению действия оператора Гамильтона $\overset{\circ}{\nabla}$ на \mathbf{v} . Именно это выражение входит в (1.80).

Записанное выше выражение (1.81) представляет сложную функцию: скорость \mathbf{v} зависит от \mathbf{R} через посредство \mathbf{r} . Поэтому вычисление действия оператора $\overset{\circ}{\nabla}$ должно проводиться по правилу дифференцирования сложной функции: сначала идет дифференцирование по \mathbf{r} а затем уже вычисление производной \mathbf{r} по \mathbf{R} . Это дает

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot (\nabla \mathbf{v}). \quad (1.82)$$

Транспонируя, получим

$$\mathbf{v} \overset{\circ}{\nabla} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} \right)^T = (\mathbf{v} \nabla) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right). \quad (1.83)$$

Теперь уже можно подставить полученные выражения в (1.80). Это дает

$$\dot{\mathbf{G}} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot (\nabla \mathbf{v}) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) + \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot (\mathbf{v} \nabla) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right).$$

Комбинируя слагаемые, получаем окончательно

$$\dot{\mathbf{G}} = 2 \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{D} \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right), \quad (1.84)$$

где \mathbf{D} — симметричная часть тензора $\nabla \mathbf{v}$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) = (\nabla \mathbf{v})^S \quad (1.85)$$

Но теперь уже можно вычислить и материальную производную от \mathbf{F} . Имеем по (1.72).

$$\dot{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{v} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) + \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{v} \right).$$

Используя (1.82) и (1.83), получим

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{v} \nabla) \cdot \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) + \left(\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot (\nabla \mathbf{v}).$$

Выделяя в правой части \mathbf{F} , получим

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{v} \nabla) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\nabla \mathbf{v}).$$

или

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}), \quad (1.86)$$

где

$$\mathbf{\Omega} = (\nabla \mathbf{v})^A = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla). \quad (1.87)$$

Рассмотрим, наконец, меру деформации Альманси

$$\mathbf{g} = (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R} \nabla).$$

Материальная производная равна

$$\dot{\mathbf{g}} = (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R} \nabla) + (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R} \nabla) \cdot \quad (1.88)$$

Входящие сюда величины $(\nabla \mathbf{R})$ и $(\mathbf{R} \nabla)$ представлены в эйлеровых переменных. Поэтому следует вычислить материальную производную по всем правилам. В соответствии с формулой (1.15) имеем

$$(\nabla \mathbf{R}) \cdot = \frac{\partial (\nabla \mathbf{R})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \nabla \mathbf{R}). \quad (1.89)$$

Имеем

$$\frac{\partial(\nabla\mathbf{R})}{\partial t} = \nabla \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t},$$

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{R})) = (\nabla\mathbf{v}) \cdot (\nabla\mathbf{R}) + \mathbf{v} \cdot (\nabla\nabla\mathbf{R}),$$

или

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla\nabla\mathbf{R}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{R})) - \nabla\mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{R}).$$

Используя последние выражения в (1.89), получим

$$(\nabla\mathbf{R})' = \nabla\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{R}\right) - (\nabla\mathbf{v}) \cdot (\nabla\mathbf{R}).$$

Но ведь известно, что материальная производная \mathbf{R}

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{R})$$

равна нулю, поскольку \mathbf{R} — начальная координата материальной точки, и значит $\mathbf{R} = \text{const}$.

Следовательно,

$$(\nabla\mathbf{R})' = -(\nabla\mathbf{v}) \cdot (\nabla\mathbf{R}),$$

и еще

$$(\mathbf{R}\nabla)' = -(\mathbf{R}\nabla) \cdot (\mathbf{v}\nabla).$$

Внося последние два выражения в (1.88), получим

$$\dot{\mathbf{g}} = -(\nabla\mathbf{v}) \cdot (\nabla\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R}\nabla) - (\nabla\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{R}\nabla) \cdot (\mathbf{v}\nabla),$$

или

$$\dot{\mathbf{g}} = -(\nabla\mathbf{v}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot (\mathbf{v}\nabla), \quad (1.90)$$

и наконец,

$$\dot{\mathbf{g}} = -(\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}). \quad (1.91)$$

Используя аналогичные вычисления, находим, наконец, материальную производную безымянной меры \mathbf{m}

$$\dot{\mathbf{m}} = -2(\mathbf{R}\nabla) \cdot \mathbf{D} \cdot (\nabla\mathbf{R}).$$

Итак, цель этого раздела достигнута: установлена связь между производными от мер деформации и новыми тензорами \mathbf{D} и $\mathbf{\Omega}$, характеризующими мгновенное состояние движения.

1.8. Тензор скоростей деформации и тензор вихря

Настоящий параграф посвящен выявлению механического смысла новых тензоров \mathbf{D} и $\mathbf{\Omega}$, появившихся при рассмотрении предыдущего параграфа и, как уже сказано, характеризующих мгновенное состояние движения.

Подставим выражения мер деформации через тензоры деформации (1.71), (1.72), (1.73) и (1.74) в уравнения для производных мер деформации (1.84), (1.86), (1.91) и последующую. Получим

$$2\dot{\mathbf{C}} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \mathbf{r} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{r} \nabla \end{pmatrix},$$

$$2\dot{\mathbf{A}}' = (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}) \cdot (\mathbf{E} + 2\mathbf{A}') + (\mathbf{E} + 2\mathbf{A}') \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}), \quad (1.92)$$

$$-2\dot{\mathbf{A}} = -(\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}) \cdot (\mathbf{E} - 2\mathbf{A}) + (\mathbf{E} - 2\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}),$$

$$-2\dot{\mathbf{C}}' = -2(\mathbf{R}\nabla) \cdot \mathbf{D} \cdot (\nabla\mathbf{R}).$$

Рассмотрим такие моменты времени, когда выполняется одно из условий

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A}' = 0, \quad \nabla \mathbf{R} = \mathbf{E}. \quad (1.93)$$

Тогда выполнится одно из уравнений, которые получаются подстановкой (1.93) в уравнения (1.92). Эти уравнения таковы

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{A}}' = \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{C}}' = \mathbf{D}. \quad (1.94)$$

В любом из рассматриваемых случаев материальная скорость тензоров деформаций оказалась равной изучаемому тензору \mathbf{D} . Как его назвать, и в чем его механический смысл? Ну, конечно, его стоит назвать так: тензор скоростей деформаций! Он действительно характеризует скорость изменения какой-нибудь из деформаций в такие моменты времени, которые определяются хотя бы одной из формул (1.93). Приведенное название четко отражает его механический смысл. Оно прочно закрепилось за ним в мировой литературе.

Чтобы выяснить механический смысл тензора $\mathbf{\Omega}$, приведем рассуждение, за которым в литературе закрепилось название: теорема Гельмгольца.

Пусть имеется некоторое поле скоростей, заданное в эйлеровых координатах

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Такое описание уже встречалось ранее в формуле (1.11). Рассмотрим теперь некоторую материальную точку M , имеющую текущую (эйлерову) координату \mathbf{r}_M . Зафиксируем момент времени t и окружим эту материальную точку некоторой малой окрестностью. Воспользуемся в этой малой окрестности следующим представлением текущего радиус-вектора

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_M + d\mathbf{r}.$$

Описание поля скоростей в этой окрестности окажется таким

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_M + d\mathbf{r}, t). \quad (1.95)$$

Ограничимся линейным приближением по $d\mathbf{r}$ в (1.95). Для этого разложим функцию \mathbf{v} по (1.95) в ряд Маклорена по степеням $d\mathbf{r}$ и удержим только члены до первого порядка малости относительно $|d\mathbf{r}|$. Получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_M, t) + (\nabla \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Введем обозначение

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}(\mathbf{r}_M, t) \quad (1.96)$$

и используем разложение тензора $(\nabla \mathbf{v})$ на симметричную и антисимметричную части

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})^S + (\nabla \mathbf{v})^A. \quad (1.97)$$

В соответствии с (1.85) первое слагаемое ранее обозначено \mathbf{D} , а второе — в соответствии с (1.87), обозначено $\mathbf{\Omega}$.

Учитывая введенное обозначение (1.96) и разложение (1.97) получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{r}.$$

Наконец, воспользуемся выражением антисимметричного тензора $\mathbf{\Omega} = (\nabla \mathbf{v})^A$ через сопутствующий вектор $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{\Omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E},$$

причем

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}. \quad (1.98)$$

Тогда получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r},$$

или, наконец, после умножения единичного тензора \mathbf{E} на $d\mathbf{r}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.99)$$

Это знаменитая формула Гельмгольца. С ее использованием проведем некоторое рассуждение.

1. Пусть $\mathbf{D} = 0$. Это значит, что в окрестности материальной точки тензор деформации Коши-Грина не изменяется. Последнее означает, что в этот момент движения расстояние между точками окрестности деформируемого тела не изменяется. Не изменяются и углы между материальными отрезками. Следовательно, окрестность точки M движется как абсолютно твердое тело. Закон движения (1.99) при $\mathbf{D} = 0$ оказывается таким

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}.$$

Как и должно быть, этот закон описывает движение окрестности точки M , как твердого тела, причем \mathbf{v}_M — скорость полюса, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость этого твердого тела.

2. Пусть теперь $\mathbf{D} \neq 0$. Тогда формула Гельмгольца (1.99) дает разложение движения окрестности точки M на три составляющие: поступательное движение со скоростью \mathbf{v}_M вместе с полюсом, вращение вокруг полюса с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и деформацию с интенсивностью \mathbf{D} .

Приведенное суждение носит название теоремы Гельмгольца. В результате проделанного на первый взгляд безобидного рассуждения введено в рассмотрение важное понятие угловой скорости деформируемого тела. Более того, представлена формула (1.98) для ее вычисления.

Замечание 1.7. При $\mathbf{D} = 0$ обращается в нуль не только скорость изменения тензора деформации Коши-Грина \mathbf{C} , но и материальная скорость изменения безымянного тензора \mathbf{C}' по (1.92). А вот скорость изменения тензора деформаций Альманси \mathbf{A} и тензора деформации Фингера \mathbf{A}' в нуль не обращаются! Почему? Об этом будет сказано в следующем разделе.

Замечание 1.8. Тензор $\mathbf{\Omega}$ носит название тензора угловых скоростей, тензора вихря или, наконец, тензора спина.

1.9. Тензор поворота окрестности материальной точки деформируемого тела

В каждой материальной точке M деформируемого материального тела, пребывающего в текущем положении вводим ортогональный триэдр с ортами \mathbf{b}_k . Под триэдром понимается система из трех ортогональных единичных векторов \mathbf{b}_k . Полагаем, что этот триэдр вращается с угловой скоростью окрестности точки M , как известно, равной $\boldsymbol{\omega}$. Мысленно связываем с введенным триэдром абсолютно твердое тело. Оно по предположению вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ окрестности точки M . Из теоретической механики известно, что производная по времени любого жестко связанного с жестким телом вектора \mathbf{b} может быть вычислена по формуле Эйлера

$$\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

Точно так же может быть вычислена скорость изменения любого вектора \mathbf{b}_k , составляющего триэдр

$$\dot{\mathbf{b}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_k. \quad (1.100)$$

Введем в рассмотрение тензор поворота \mathbf{V} окрестности точки M материального тела

$$\mathbf{V} = \mathbf{b}_k \mathbf{i}_k. \quad (1.101)$$

Этот тензор обладает свойствами

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}. \quad (1.102)$$

Эти свойства легко проверяются прямой подстановкой (1.101) в (1.102). Но буквально такими же свойствами обладает обратный тензор \mathbf{V}^{-1}

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T.$$

Из (1.101) легко найти выражение $\mathbf{b}_l = \mathbf{V} \cdot \mathbf{i}_l$. Вычислим материальную производную \mathbf{V} по времени. Имеем

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{b}}_k \mathbf{i}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_k \mathbf{i}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}. \quad (1.103)$$

В предыдущем параграфе было показано, что тензор вихря имеет выражение

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}.$$

Выделяя этот комплекс в (1.103), находим новое уравнение для \mathbf{V}

$$\dot{\mathbf{V}} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V}. \quad (1.104)$$

Уравнения (1.104) и (1.103) представляют дифференциальные уравнения для \mathbf{V} . Добавим к ним начальное условие

$$t = t_0, \quad \mathbf{V} = \mathbf{E}. \quad (1.105)$$

Так, что (1.103) и (1.105) или (1.104) и (1.105) представляют задачу Коши для определения тензора поворота окрестности материальной точки.

Далее, по (1.102) находим

$$|\mathbf{V}| |\mathbf{V}^T| = 1,$$

или

$$|\mathbf{V}|^2 = 1.$$

Отсюда находим

$$|\mathbf{V}| = \pm 1. \quad (1.106)$$

Очевидно, что следует выбрать здесь какой-нибудь один знак. Очевидно, что в начальный момент имеем равенство (1.105). Значит, следует выбрать в (1.106) знак плюс.

$$|\mathbf{V}| = +1. \quad (1.107)$$

Так что определитель тензора поворота всегда имеет значение +1, как в (1.107).

Рассмотрим теперь некоторый вектор \mathbf{a} , заданный своим разложением в ортогональном и нормированном базисе неподвижной системы координат $ox_1x_2x_3$

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_l a_l. \quad (1.108)$$

Составим произведение

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b}_k \mathbf{i}_k) \cdot \mathbf{i}_l a_l = \mathbf{b}_l a_l = \mathbf{a}'. \quad (1.109)$$

Получен так называемый повернутый вектор — вектор, имеющий те же координаты, что и \mathbf{a} , но уже в базисе \mathbf{b}_k .

Рассмотрим теперь тензор \mathbf{P} и зададим его в базисе неподвижной системы координат

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}.$$

Составим произведение

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}^T = (\mathbf{b}_k \mathbf{i}_k) \cdot (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}) \cdot (\mathbf{b}_l \mathbf{i}_l)^T = \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n P_{mn} = \mathbf{P}'. \quad (1.110)$$

Получился тензор \mathbf{P}' с теми же координатами, но в повернутом вместе с окрестностью базисе \mathbf{b}_k . Такой тензор называется повернутым тензором.

Введем теперь в рассмотрение материальную производную некоторого тензора \mathbf{M} во вращающемся базисе. Пусть мы имеем некоторый тензор \mathbf{M} и зададим его во вращающемся базисе \mathbf{b}_k

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l M_{kl}. \quad (1.111)$$

Материальной производной тензора \mathbf{M} во вращающемся базисе называется тензор

$$\mathbf{M}^\nabla = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \dot{M}_{kl}. \quad (1.112)$$

Введенная производная носит также название: производная Яуманна.

Найдем формулу, связывающую материальную производную с производной Яуманна. Для этого вычислим материальную производную от (1.111). Получим по правилу Лейбница дифференцирования произведения

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \dot{M}_{kl} + \dot{\mathbf{b}}_k \mathbf{b}_l M_{kl} + \mathbf{b}_k \dot{\mathbf{b}}_l M_{kl}. \quad (1.113)$$

Материальные производные \mathbf{b}_k вычисляем по (1.100)

$$\dot{\mathbf{b}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_k = -(-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b}_k.$$

Используя тензор вихря $\boldsymbol{\Omega}$, получим

$$\dot{\mathbf{b}}_k = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{b}_k = \mathbf{b}_k \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.114)$$

Второе равенство в (1.114) имеет место потому, что тензор вихря $\boldsymbol{\Omega}$ — антисимметричен. Используя (1.114) в (1.113), получим

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \dot{M}_{kl} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l M_{kl} + \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l M_{kl} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.115)$$

Первое слагаемое правой части — это производная Яуманна, а в остальных слагаемых выделяется тензор \mathbf{M} . Так что, получаем из (1.115)

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}^\nabla - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}.$$

Отсюда и находим явное выражение производной Яуманна через материальную производную

$$\mathbf{M}^\nabla = \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.116)$$

В качестве примеров приводим выражения производных Яуманна для тензоров Фингера и Альманси (1.86) и (1.91). Используя (1.116), находим

$$\mathbf{F}^\nabla = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}, \quad (1.117)$$

$$\mathbf{g}^\nabla = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{D}. \quad (1.118)$$

Замечание 1.9. В разделе 3.6 при рассмотрении теоремы Гельмгольца мы, с некоторым удивлением, обнаружили, что материальная скорость изменения тензоров деформаций Фингера и Альманси а значит и мер деформаций Фингера и Альманси не обращаются в нуль при $\mathbf{D} = 0$. Так вот, материальные производные мер деформации, а значит, и тензоров деформации Фингера и Альманси, все таки, обращаются в нуль при $\mathbf{D} = 0$ но, правда при вычислении этих производных в базисе, вращающемся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вместе с окрестностью материальной точки деформируемого тела.

1.10. Тензоры малой деформации и малого поворота

Возвращаемся в раздел 1.6. В нем представлены выражения всех рассматривавшихся до настоящего момента времени тензоров деформаций через вектор перемещения \mathbf{u} .

В исключительно важном для инженерных приложений случае, когда выполняются условия

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right| \ll 1, \quad (1.119)$$

все выражения деформаций сильно упрощаются и принимают вид

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}' = \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \overset{\circ}{\nabla} \right),$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}' = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla).$$

Но этого мало. Последние выражения мало отличаются друг от друга. Убедиться в этом можно воспользовавшись формулой дифференцирования сложной функции (1.82)

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot (\nabla \mathbf{u})$$

и вспомнив (1.70), то есть

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}.$$

Найдем

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} = \left(\mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \right) \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} \right) \cdot (\nabla \mathbf{u}).$$

Учитывая (1.119) и отбрасывая заведомо малые квадратичные слагаемые, получим

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}.$$

Так, что все тензоры деформации оказались равными и равными так называемому тензору малой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}' = \mathbf{A} = \mathbf{C}' = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.120)$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) = \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \overset{\circ}{\nabla} \right). \quad (1.121)$$

Название тензора — тензор малой деформации — оправдывается тем, что при выполнении условий (1.119) его координаты малы, то есть

$$|\varepsilon_{kl}| \ll 1. \quad (1.122)$$

Наконец, приведем выражения координат этого тензора в прямолинейной ортогональной декартовой системе координат. Для этого используем разложения

$$\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{i}_l u_l$$

и внесем их в (1.121). Находим

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) (\mathbf{i}_l u_l) + (\mathbf{i}_k u_k) \left(\mathbf{i}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right) = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \varepsilon_{kl},$$

так, что

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right). \quad (1.123)$$

В силу исключительной важности этого тензора продемонстрируем простейший механический смысл его координат. Воспользуемся представлением меры деформации (1.71)

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + 2\mathbf{C}.$$

В силу (1.120) находим

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.124)$$

или в координатах

$$G_{kl} = \delta_{kl} + 2\varepsilon_{kl}. \quad (1.125)$$

Найдем относительное удлинение (1.52)

$$\delta_k = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{kk}} - 1, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right).$$

Учитывая малость координат (1.122), получим

$$\delta_k = \varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k \end{array} \right). \quad (1.126)$$

Итак, диагональные координаты тензора малой деформации равны относительным удлинениям отрезков, параллельных координатным осям.

Для выяснения механического смысла недиагональных координат тензора малой деформации воспользуемся формулой (1.56) и внесем в нее значения G_{kr} по (1.125)

$$\cos \varphi_{kr} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{kr} \right) = \frac{+2\varepsilon_{kr}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{kk})(1 + 2\varepsilon_{rr})}}, \quad \left(\begin{array}{c} \not\{ \\ k,r \end{array} \right).$$

Линеаризуя, получим

$$\gamma_{kr} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{kr} = 2\varepsilon_{kr}. \quad (1.127)$$

Итак, недиагональные координаты тензора малой деформации равны половинам изменений углов между материальными отрезками, которые до деформации были параллельны координатным осям. Эти изменения углов иногда называют сдвигами.

Обратим теперь внимание на относительный объем (1.68)

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{|\mathbf{G}|}.$$

После подстановки сюда выражения \mathbf{G} через тензор малой деформации (1.124), получим

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{|\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}|}. \quad (1.128)$$

Вычислим входящий сюда определитель

$$|\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}| = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_{11} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{21} & 1 + 2\varepsilon_{22} & 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} & 2\varepsilon_{32} & 1 + 2\varepsilon_{33} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая его по стандартному правилу, получим разложение его по произведениям элементов разных столбцов и строк

$$|\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}| = (1 + 2\varepsilon_{11})(1 + 2\varepsilon_{22})(1 + 2\varepsilon_{33}) + 2\varepsilon_{21}2\varepsilon_{32}2\varepsilon_{13} + 2\varepsilon_{12}2\varepsilon_{23}2\varepsilon_{31} - \\ - 2\varepsilon_{13}(1 + 2\varepsilon_{22})2\varepsilon_{31} - 2\varepsilon_{12}2\varepsilon_{21}(1 + 2\varepsilon_{33}) - (1 + 2\varepsilon_{11})2\varepsilon_{23}2\varepsilon_{32}.$$

Только первый член этого разложения содержит слагаемые нулевого и первого порядка, остальные члены имеют второй и третий порядки. Удерживая слагаемые до первого порядка, получим

$$|\mathbf{E} + 2\boldsymbol{\varepsilon}| = 1 + 2(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 1 + 2 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Теперь остается подставить это значение в (1.128) и вычислить результат с точностью до первого порядка. Получаем

$$\frac{dv}{dV} = 1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.129)$$

По аналогии найдем относительную объемную деформацию (1.69)

$$\theta = \frac{dv}{dV} - 1 = \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.130)$$

Переходим к вычислению тензора малого поворота.

Известно, что угловая скорость окрестности материальной точки имеет выражение (1.98)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}.$$

Но по (1.70) имеем $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ и значит, вычисляя здесь материальную производную найдем

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{u})$$

Или

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Учитывая (1.119) и пренебрегая малыми, приходим к приближенному выражению

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

С ошибкой в членах второго порядка имеем теперь цепочку равенств

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right),$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}, \quad (1.131)$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор малого поворота окрестности. С его использованием вычисляем элементы повернутого базиса

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{i}_k + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{i}_k.$$

И, наконец, по формуле (1.101) находим тензор малого поворота

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_k \mathbf{i}_k = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}. \quad (1.132)$$

Приняв $\boldsymbol{\varphi}$ в качестве сопутствующего вектора некоторого антисимметричного тензора $\boldsymbol{\Phi}$, вычислим последний по формулам (1.66) учебного пособия [9].

$$\boldsymbol{\Phi} = -\mathbf{E} \times \boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}.$$

В силу (1.131) находим

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla) = (\nabla \mathbf{u})^A \quad (1.133)$$

и, наконец, по (1.132) приходим к результату

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\Phi}. \quad (1.134)$$

Таким образом, получено представление тензора малого поворота окрестности некоторой типичной материальной точки деформируемого тела.

2. ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

2.1. Пересмотр понятий «сосредоточенная масса» и «сосредоточенная сила» в теоретической механике

Материал этой главы представляет приспособление понятий и законов теоретической механики к описанию движения деформируемых тел. Известно, что в теоретической механике успешно используются понятия сосредоточенной массы и сосредоточенной силы. Для механики деформируемых тел эти понятия должны быть переосмыслены. Появятся новые понятия: плотность распределения массы, массовая сила и, наконец, напряжения. С их помощью будут сформулированы законы динамики деформируемых тел.

2.2. Плотность материального деформируемого тела и закон сохранения массы

Рассматриваем деформируемое материальное тело в текущий момент времени t . Около материальной точки M этого тела выделяем малое материальное тело с объемом Δv и диаметром d . Предполагаем, что в выделенный объем попадают материальные частицы общей массой Δm . Предел отношения этой массы к занимаемому ею объему при $d \rightarrow 0$ называем плотностью деформируемого материального тела

$$\rho = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v}. \quad (2.1)$$

В соответствии с этим определением плотность зависит от текущей координаты \mathbf{r} выбранной точки M и момента времени t , так что

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

Полагаем, что это непрерывная или кусочно-непрерывная функция пространственной координаты \mathbf{r} и непрерывная функция времени. В начальный момент времени эта плотность принимает значение

$$\rho_0 = \rho(\mathbf{R}, 0). \quad (2.3)$$

Как видно, эта функция зависит только от пространственной координаты \mathbf{R} . Полагаем, что это непрерывная или кусочно-непрерывная

функция координаты \mathbf{R} . В частном случае однородного тела плотность ρ_0 постоянна. С помощью понятия плотности можно вычислить массу материального тела, используя интегрирование по объему

$$m = \int_v \rho(\mathbf{r}, t) dv. \quad (2.4)$$

Масса материального тела в начальный момент времени также вычисляется интегрированием, но уже по объему начального положения этого тела

$$m_0 = \int_V \rho_0 dV. \quad (2.5)$$

Допустим, что речь идет об одном и том же материальном теле, т.е. о теле, содержащем одни и те же материальные точки, но только пребывающие в текущем и начальном положениях. Представляется убедительным утверждение о том, что в этом случае оба интеграла (2.4) и (2.5) выражают массу одного и того же материального тела, и значит, они равны

$$m = \int_v \rho dv = \int_V \rho_0 dV. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) носит название закона сохранения массы материального тела. Говоря определеннее, это интегральная форма закона сохранения массы. Полагаем, что закон сохранения массы должен выполняться, как для всего материального тела, так и для любой его части. Применяя (2.6) к бесконечно малому материальному телу, получим

$$\rho dv = \rho_0 dV$$

или

$$\rho = \rho_0 \frac{dV}{dv}. \quad (2.7)$$

Воспользовавшись формулами (1.66) и (1.68) для относительного объема, получим формулировки закона сохранения массы, выраженные через меры деформаций Альманси, Коши – Грина или Фингера

$$\rho = \rho_0 \sqrt{|\mathbf{g}|} = \frac{\rho_0}{\sqrt{|\mathbf{G}|}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{|\mathbf{F}|}}. \quad (2.8)$$

Формулировки (2.8) представляют локальные формулировки закона сохранения массы. Они широко используются в механике деформируемого твердого тела [3].

Обратимся к еще одной формулировке — формулировке в виде дифференциального уравнения. Последняя широко используется в механике жидкости и газа [7, 10].

Вычислим материальную производную плотности в соответствии с первой формулой (2.8)

$$\dot{\rho} = \frac{\rho_0}{2} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{g}|}} \frac{\partial |\mathbf{g}|}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}}^T. \quad (2.9)$$

Здесь следует использовать выражение производной от меры деформации Альманси по (1.90) и формулу дифференцирования определителя $|\mathbf{g}|$ по тензору \mathbf{g} . Чтобы получить последнюю, воспользуемся разложением определителя по элементам r -ой строки

$$|\mathbf{g}| = \sum_{p=1}^3 g_{rp} A_{rp}, \quad \left(\begin{array}{c} \Sigma \\ r \backslash \end{array} \right) \quad (2.10)$$

где A_{rp} — алгебраическое дополнение элемента g_{rp} .

Обращаем внимание на то, что некий конкретный элемент g_{rp} не входит в свое алгебраическое дополнение, так что разложение (2.10) оказывается линейной функцией g_{rp} . Это облегчает дифференцирование и дает следующий результат

$$\frac{\partial |\mathbf{g}|}{\partial g_{rp}} = A_{rp}.$$

В соответствии с определением находим производную определителя по тензору

$$\frac{\partial |\mathbf{g}|}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{i}_r \mathbf{i}_p \frac{\partial |\mathbf{g}|}{\partial g_{rp}} = \mathbf{i}_r \mathbf{i}_p A_{rp}. \quad (2.11)$$

Чтобы понять, что представляет собой полученное разложение, воспользуемся представлением обратного тензора (1.108) из [9]

$$\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{i}_r \mathbf{i}_p \frac{A_{pr}}{|\mathbf{g}|}$$

или

$$(\mathbf{g}^{-1})^T = \mathbf{i}_r \mathbf{i}_p \frac{A_{rp}}{|\mathbf{g}|}.$$

Сопоставляя с (2.11), находим

$$\frac{\partial |\mathbf{g}|}{\partial \mathbf{g}} = |\mathbf{g}| (\mathbf{g}^{-1})^T. \quad (2.12)$$

Подставляя этот результат в (2.9), получим

$$\dot{\rho} = \frac{\rho_0}{2} \sqrt{|\mathbf{g}|} (\mathbf{g}^{-1})^T \cdot \dot{\mathbf{g}}.$$

Наконец, вспомним (2.8), учтем симметрию тензора \mathbf{g} и значение производной по (1.90) и получим

$$\dot{\rho} = \frac{\rho}{2} \mathbf{g}^{-1} \cdot (-(\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot (\mathbf{v} \nabla)). \quad (2.13)$$

Дальнейшие преобразования проводим в соответствии с формулами (1.47) и (1.48) из [9].

$$\mathbf{g}^{-1} \cdot ((\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}^{-1}) \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\mathbf{g}^{-1} \cdot (\mathbf{g} \cdot (\mathbf{v} \nabla)) = (\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{g}) \cdot (\mathbf{v} \nabla) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{v} \nabla) = \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

В обеих строчках получено одно и то же значение — $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Учитывая этот результат в (2.13), получим

$$\dot{\rho} = -\rho (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

или

$$\dot{\rho} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (2.14)$$

Это и есть искомая формулировка закона сохранения массы, записанная в виде дифференциального уравнения. Ей легко придать еще одно весьма популярное представление. Чтобы сделать это, используем в (2.14) выражение материальной производной (1.15). Тогда (2.14) преобразуется к следующему виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \rho) + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (2.15)$$

Остается вспомнить правило Лейбница вычисления оператора Гамильтона от произведения

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

и переписать (2.15) в следующей форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.16)$$

Формулы (2.14) и (2.16) позволяют сделать некоторые важные заключения о характере течения деформируемого тела.

Первое заключение.

Если материал несжимаем, то тогда

$$\rho = \text{const.}_{r,t}$$

Но в этом случае

$$\dot{\rho} = 0,$$

и тогда имеем по (2.14)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.17)$$

Мы получили знаменитое условие несжимаемости деформируемого тела.

Второе заключение.

Пусть имеется стационарное течение. Это значит, что и ρ и \mathbf{v} в каждой точке пространства \mathbf{r} не зависят от времени. Тогда по (2.16) найдем

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

или

$$\rho \mathbf{v} = \text{const.}_{r,t} \quad (2.18)$$

Это соотношение указывает на важную закономерность установившегося течения сжимаемой жидкости: в тех точках пространства, где действует закон (2.18), скорость течения будет больше в тех точках, в которых плотность меньше, и меньше в тех, где плотность больше.

Вычислим теперь производную по времени от интеграла по материальному телу от какого-то свойства Λ

$$\mathbf{M} = \int_v \Lambda \rho dv. \quad (2.19)$$

Для этого заменим интеграл (2.19) суммой Римана

$$\mathbf{M} = \sum_k \Lambda \rho \Delta v_k,$$

где Δv_k — объемы малых элементарных материальных тел, на которые разбито тело.

А теперь учтем закон сохранения массы. Возьмем его в локальной форме (2.7), перепишем его для конечных объемов

$$\rho = \rho_{0k} \frac{\Delta V_k}{\Delta v_k}$$

и вычислим произведение $\rho_k \Delta v_k$

$$\rho_k \Delta v_k = \rho_{0k} \Delta V_k.$$

Но оно остается постоянным в течение всего времени. Значит, производная по времени от суммы Римана интеграла (2.19) имеет выражение

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_k \dot{\Lambda}_k \rho_k \Delta v_k.$$

Но ведь это сумма Римана для интеграла, так что имеем

$$\dot{\mathbf{M}} = \int_v \dot{\Lambda} \rho dv. \quad (2.20)$$

2.3. Классификация внешних воздействий на деформируемое тело

Рассматриваем некоторое материальное деформируемое тело в текущий момент времени t . Полагаем, что к его материальным точкам приложены внешние силы. Прямое использование этих сил, вполне эффективное в теоретической механике, оказывается неудобным и поэтому неприемлемым в механике деформируемых тел. Необходимо введение новых понятий. Обращаем внимание на то, что внешние воздействия на тело прикладываются только в двух местах: либо к материальным точкам, расположенным на поверхности s , либо к материальным точкам, расположенным внутри объема v . Рассмотрим эти воздействия по отдельности.

Выделим на поверхности s материального объекта малый элемент поверхности с площадью Δs и диаметром d (рис. 2.1). Обозначаем $\Delta \mathbf{P}$ и $\Delta \mathbf{M}$ — главный вектор и главный момент совокупности внешних сил и, возможно, моментов, действующих на выделенный элемент поверхности. Образуем их отношение к площади элемента Δs и рассмотрим пределы

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta s} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.21)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta s} = \boldsymbol{\mu}. \quad (2.22)$$

Полагаем, что эти пределы существуют. Первый предел называется силовым напряжением или просто напряжением, а второй — моментным напряжением. Размерность напряжения — $\frac{H}{m^2}$. Такая единица напряжения

называется «паскаль». Размерность моментного напряжения — $\frac{H}{m}$.

Специального названия эта единица не имеет.

Итак, мы получили новые понятия механики деформируемых тел. Конечно, в основе своей эти понятия имеют известные из теоретической механики понятия о главном векторе и главном моменте совокупности сил. Эти новые понятия удобны для использования в механике деформируемых тел. Например, главный вектор и главный момент всех сил, действующих на поверхность тела, могут быть найдены интегрированием

$$\mathbf{P} = \int_s \boldsymbol{\tau} ds, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M} = \int_s \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} ds + \int_s \boldsymbol{\mu} ds. \quad (2.24)$$

Формулой (2.24) представлен момент внешних воздействий относительно начала координат.

Приведем простейший пример: давление жидкости на поверхность деформируемого тела. По закону Паскаля действие жидкости с давлением p направлено против нормали \mathbf{n} к текущей поверхности деформируемого тела, так что имеем

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\mu} = 0.$$

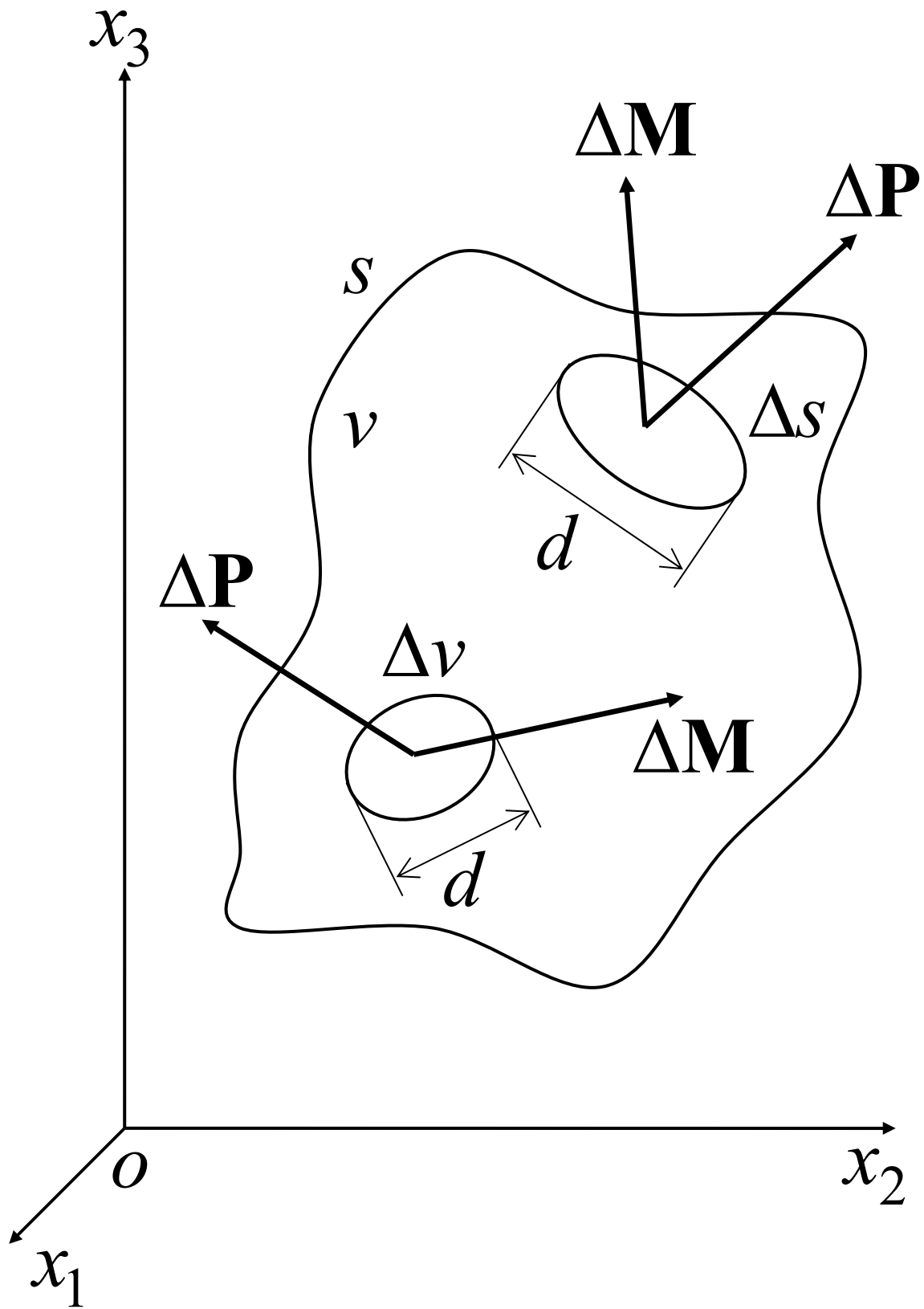


Рис. 2.1. Силы и моменты, действующие на элемент объема и элемент поверхности

Замечание 2.1. Обращаем внимание на то, что в формулах (2.21) и (2.22) используются пределы именно при стремлении диаметра площадки d к нулю, а вовсе не предел при стремлении площади Δs элемента поверхности к нулю! Это важно иметь в виду, поскольку, в принципе, при стремлении Δs к нулю диаметр d может вообще не стремиться к нулю. В этом случае элемент поверхности Δs становится все более узким, и в пределе стремится к некоторой линии. Тогда пределы (2.21) и (2.22) дадут значения τ и μ — средние вдоль некоторых линий. Это, конечно, само по себе не так страшно. Однако важные для последующего формулы (2.23) и (2.24) уже не будут иметь места.

Выделим теперь внутри объема v малый элемент объема Δv с диаметром d (рис. 2.1). Обозначаем $\Delta \mathbf{P}$ и $\Delta \mathbf{M}$ — главный вектор и главный момент совокупности внешних воздействий на этот элемент. Образует их отношения к массе элемента $\rho \Delta v$ и рассмотрим пределы

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\rho \Delta v} = \mathbf{F}, \quad (2.25)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\rho \Delta v} = \mathbf{m}. \quad (2.26)$$

Полагаем, что эти пределы существуют. Первый предел называется интенсивностью массовой силы или просто массовой силой, а второй — интенсивностью массового момента или массовым моментом. Размерность массовой силы $\frac{H}{кг}$, а массового момента — $\frac{H \cdot м}{кг}$.

Введенные новые понятия чрезвычайно удобны в механике деформируемых тел. С их помощью можно записать выражение главного вектора и главного момента сил и моментов, приложенных в пределах объема материального тела.

$$\mathbf{P} = \int_v \rho \mathbf{F} dv \quad (2.27)$$

$$\mathbf{M} = \int_v \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} dv + \int_v \rho \mathbf{m} dv \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) — это значение момента нагрузок относительно начала координат.

Приводим пример. В случае действия силы тяжести вдоль отрицательного направления оси ox_3 имеем

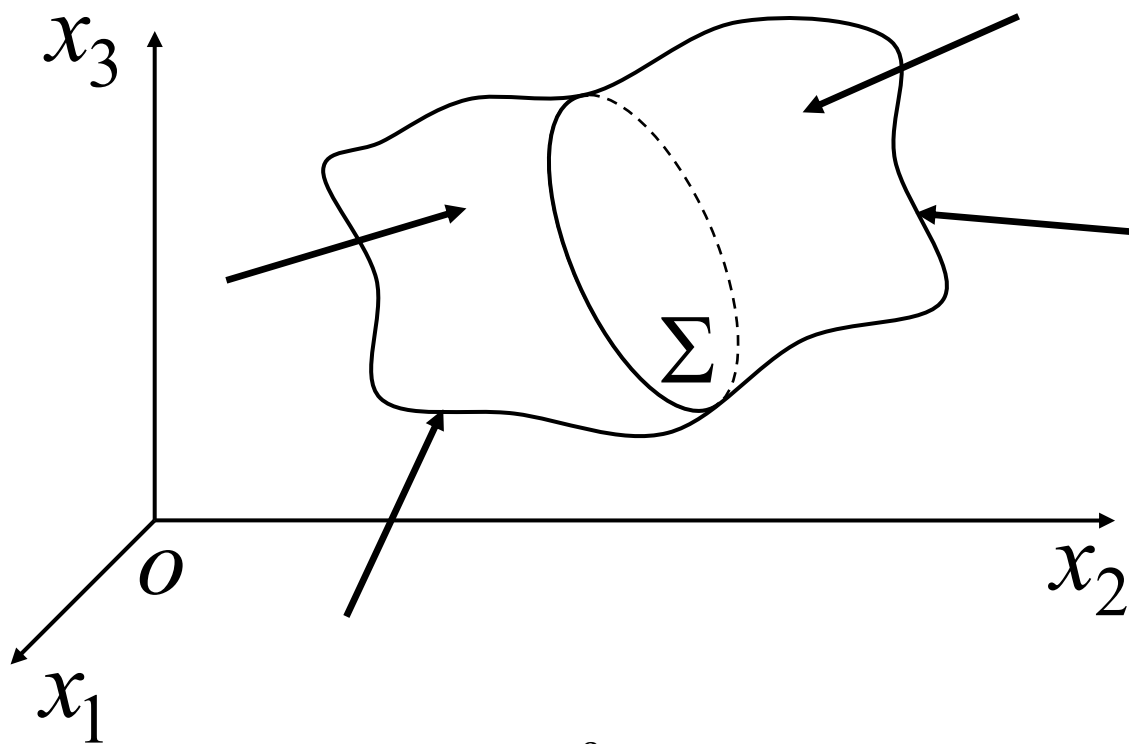
$$\rho \mathbf{F} dv = -\rho g \mathbf{i}_3 dv, \quad \mathbf{m} = 0,$$

так что

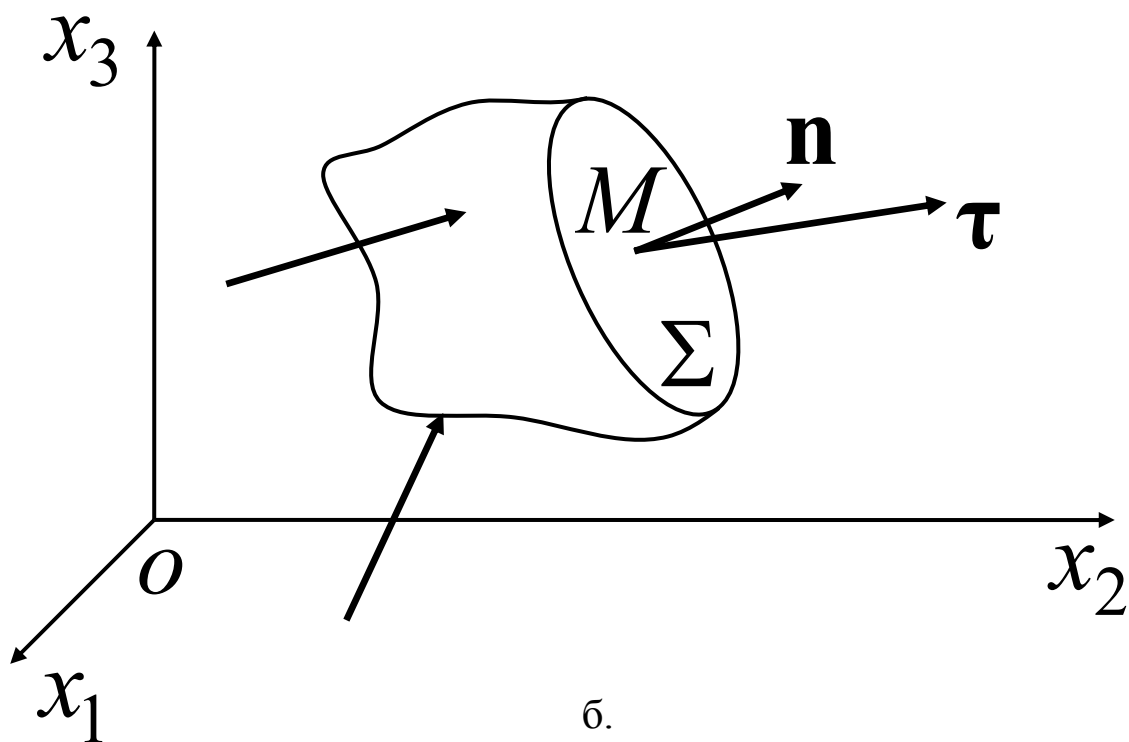
$$\mathbf{F} = -\mathbf{i}_3 g, \quad \mathbf{m} = 0.$$

2.4. Рассуждение о внутренних взаимодействиях в деформируемом теле

Обратимся теперь к очень важному понятию о внутренних силах в деформируемом теле. Чтобы их ввести в рассмотрение, воспользуемся методом сечений, широко применяемым для такой же цели в курсах теоретической механики [1]. Обращаемся к рис. 2.2а. На нем изображено деформируемое тело вместе с приложенными к нему, как на поверхности, так и в объеме внешними силами и моментами. Рассечем мысленно это тело на две части поверхностью Σ . Сохраним левую часть этого тела вместе с действующими на нее внешними нагрузками на своем месте, а вот правую часть вместе с приложенными к ней внешними нагрузками уберем в бесконечность. Постараемся заменить ее действие на оставшуюся левую часть таким образом, чтобы эта левая часть сохранила бы то же самое состояние покоя или движения, которое имело место до мысленного разделения. Чем же заменить действие отброшенной части? В теоретической механике содержится исчерпывающий ответ: внешними силами, приложенными к системам материальных точек, и, возможно, моментами, приложенными к тем же системам! Нам остается поступить так же. Но мы уже убедились в начале этого параграфа, что внешние воздействия в механике деформируемых тел могут сводиться только к силовым напряжениям $\boldsymbol{\tau}$ и моментным напряжениям $\boldsymbol{\mu}$, приложенным в точках поверхности Σ , а также к массовой силе \mathbf{F} и массовому моменту \mathbf{m} , приложенным непосредственно к материальным точкам, оказавшимся внутри объема оставшейся части. Ничего больше! Но, в общем случае, никак не меньше!



а.



б.

Рис. 2.2. Внутренние силы в деформируемом теле

Оценим теперь реалистически глубину зоны левой части тела, где еще реально действуют названные массовые силы и моменты, характеризующие взаимодействие с отброшенной правой частью. Разумеется, ответ на этот вопрос зависит от характера действующих сил. Например, гравитационные силы действуют в пределах всей оставшейся части. Их легко учесть, пользуясь стандартными формулами теории гравитации. Но для тел реальных размеров они просто малы. Ими пренебрегаем. Далее, электрические силы имеют такой же характер затухания, как и гравитационные. Поэтому их действие можно учесть стандартными методами теории электричества. Понятно, что это действие распространяется на всю оставшуюся левую часть тела. Такие взаимодействия появляются в специальных задачах, и эти задачи заслуживают специального отдельного рассмотрения. Их здесь не рассматриваем.

Остается рассмотреть силы межмолекулярного взаимодействия. В физике конденсированного состояния вещества они обычно характеризуются потенциальной энергией взаимодействия $U(x)$, как функцией расстояния x между центрами сблизившихся молекул. К хорошим результатам приводит следующая аппроксимация:

$$U(x) = \frac{a_1}{x^{12}} - \frac{a_2}{x^6}, \quad (2.29)$$

где a_1 и a_2 — постоянные. Она называется потенциалом Леннарда — Джонса. Первый член соответствует силам отталкивания, а второй — силам притяжения. Сила притяжения, равная взятой с обратным знаком производной от (2.29) убывает обратно пропорционально седьмой степени расстояния. Что касается первого члена, то он соответствует силам отталкивания, которые как видно, катастрофически быстро убывают — обратно пропорционально тринадцатой степени расстояния! Оценки, выполненные физиками с помощью (2.29), показывают, что действие отброшенной части на оставшуюся простирается на глубину порядка так называемой сферы молекулярного действия. Последняя имеет порядок величины $10^{-9} \text{ см} = 1 \text{ нм}$. К сведению читателя это всего лишь расстояние между двумя слоями атомов в кристаллической решетке!

Итак, если левая (оставшаяся) часть рассеченного деформируемого тела имеет толщину порядка нанометра, то действие отброшенной части должно быть заменено не только поверхностными силовыми напряжениями $\boldsymbol{\tau}$ и моментными напряжениями $\boldsymbol{\mu}$, но и массовыми силами \mathbf{F} и массовыми моментами \mathbf{m} . Так, вероятно, следует поступать в наномеханике — механике объемов, имеющих размеры (например, толщину) порядка нанометра.

Обратимся теперь к реалистическому с точки зрения инженерной практики случаю, когда размеры материального тела и частей, на которые она разделена, значительно превосходит нанометр. Не станем интересоваться тем, что происходит в тонком приповерхностном слое вблизи поверхности раздела Σ . Тогда следует проинтегрировать объемную силу $\rho\mathbf{F}$ и объемный момент $\rho\mathbf{m}$ по толщине приповерхностного слоя и добавить результаты к уже имеющимся поверхностным нагрузкам $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\mu}$. Итак, в случае массивных деформируемых тел действие отброшенной части тела может быть заменено только поверхностными нагрузками: силовым напряжением $\boldsymbol{\tau}$ и моментным напряжением $\boldsymbol{\mu}$. Это и есть так называемые внутренние силы в деформируемом теле.

Но это еще не классическая механика! Это, если угодно, всего одно из начал так называемой моментной механики деформируемых тел. В классической механике деформируемых тел делается одно очень важное предположение: моментные напряжения и массовые моменты равны нулю всегда и везде

$$\boldsymbol{\mu} = 0, \quad \mathbf{m} = 0. \quad (2.30)$$

Глядя на формулу (2.26), условие равенства нулю массового момента ($\mathbf{m} = 0$) можно мотивировать просто: мы сами рассматриваем только такие внешние воздействия, которые приводят ко второй формуле (2.30)! Это значит, что мы сами сознательно ограничиваем круг возможных для исследования задач. Например, мы сознательно оставляем без внимания магнитное воздействие на деформируемое тело.

Значительно труднее объяснить себе и читателю, почему моментное напряжение равно нулю ($\boldsymbol{\mu} = 0$). Опять таки, глядя на предельную формулу (2.22), мы можем, конечно, заявить: мы рассматриваем только

такие внешние поверхностные воздействия, которые дают $\mu = 0$. Этим самым мы сознательно накладываем определенные ограничения на характер внешних поверхностных нагрузок. Но ведь моментные напряжения попали и в разряд внутренних взаимодействий. Так что, накладывая условие $\mu = 0$, мы накладываем ограничение и на внутренние взаимодействия, которые заранее не известны.

Привожу более или менее убедительное рассуждение о том, почему можно принять условия (2.30).

Во введении к главе, посвященной геометрии движения, мы сосредоточили свое внимание на вопросе о том, что движется. После рассмотрения строения вещества мы пришли к важному и бесспорному выводу: движутся материальные тела-точки! А для них существенным оказывается не только перемещение в пространстве, но и поворот. Это теория Коссера. Так вот, силы совершают работу на перемещениях, а моменты на поворотах. Так что, если мы учитываем поворот тел-точек, необходимо учитывать и момент. Таким образом, появление массовых моментов \mathbf{m} и моментных напряжений μ — обязательный атрибут теории Коссера. Мы обсудили результаты применения этой теории к конкретным инженерным задачам. Результат оказался удивительно простым: без теории Коссера можно обойтись! А это означает, что можно не учитывать ни повороты материальных тел-точек, ни моменты, на них действующие, и пользоваться классическим подходом, в котором учитываются только перемещения частиц и только силы, на них действующие.

Таким образом, мы пришли к используемому в классической механике суждению: внутреннее взаимодействие в деформируемом теле характеризуется только напряжениями τ , действующими на площадках, мысленно проведенных внутри него.

На рис. 2.26 показана типичная материальная точка M , расположенная на поверхности раздела Σ , вектор \mathbf{n} внешней нормали к этой поверхности и, наконец, вектор действующего напряжения τ . Но теперь мы можем воскликнуть: через точку M можно провести много поверхностей раздела — $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$ и т.д. У каждой из них будет своя внешняя нормаль — $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \dots$ и свой вектор напряжения — $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ и т.д. Сколько сечений, столько и напряжений! Но ведь каждое сечение

характеризуется в точке M только своей внешней нормалью. Так что, можно сделать новое заявление: сколько нормалей, столько и напряжений! Это заявление привело нас к важному заключению: в каждой материальной точке вектор напряжения является функцией вектора внешней нормали, так что

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}). \quad (2.31)$$

С математической точки зрения это векторная функция единичного векторного аргумента. Возникает вопрос: как записать более или менее общее представление зависимости (2.31)? Этот вопрос можно задать иначе: из каких составляющих можно сконструировать вектор $\boldsymbol{\tau}$, зная, что он зависит от \mathbf{n} . Необходимо подумать, какие векторы можно образовать только из вектора \mathbf{n} . Ведь никаких других векторов нет! В число таких составляющих, несомненно, следует включить некий вектор \mathbf{a} , вовсе не зависящий от \mathbf{n} . Далее, в число таких составляющих следует включить векторы линейно зависящие от \mathbf{n} , а именно, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{n}$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$ где \mathbf{k} и $\boldsymbol{\chi}$ — тензоры второго ранга, а \mathbf{a} — вектор, также не зависящие от \mathbf{n} . Вот и все! Векторы, зависящие от \mathbf{n} нелинейно не учитываем, полагая их малыми.

Суммируя перечисленные четыре составляющие, получаем искомую зависимость (2.31)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{a}$$

или

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.32)$$

где обозначено

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\chi}^T + \mathbf{E} \times \mathbf{a}.$$

Остается вспомнить, что все это происходит в точке M с текущей координатой \mathbf{r} в момент времени t , так что, \mathbf{a} и $\boldsymbol{\sigma}$ зависят от \mathbf{r} и t

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t). \quad (2.33)$$

Мы уделили слишком много внимания рассуждениям о внутренних взаимодействиях в деформируемых телах. Причина этого в том, что именно здесь, всего лишь на нескольких страницах текста удалось увидеть исходные позиции, как классического, так и отличных от него

направлений в механике деформируемых тел: моментной механики, наномеханики и, наконец, нелокальной механики.

2.5. Интегральные уравнения динамики деформируемых тел

Рассматриваем некоторое материальное тело объемом v^* с поверхностью s^* в текущий момент времени. Оно изображено на рис. 2.3а. Выделяем из него произвольный кусок объемом v с поверхностью s . Этот кусок тоже изображен на рис. 2.3а. Но он же изображен отдельно на рис. 2.3б. Как показано в разделах 2.3 и 2.4, в точках его поверхности действует только напряжение $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\mu} = 0$), тогда как внутри объема действует только массовая сила \mathbf{F} ($\mathbf{m} = 0$). Запишем уравнение динамики выделенного тела. Возникает нетривиальный вопрос: в какой форме их взять? Заимствуем из теоретической механики законы движения системы материальных точек [1].

1. Производная по времени от количества движения системы \mathbf{K} равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.
2. Производная по времени от момента количества движения системы \mathbf{L} равна взятому относительно того же центра главному моменту внешних сил, приложенных к системе.

Аналитическая запись этих законов динамики такова

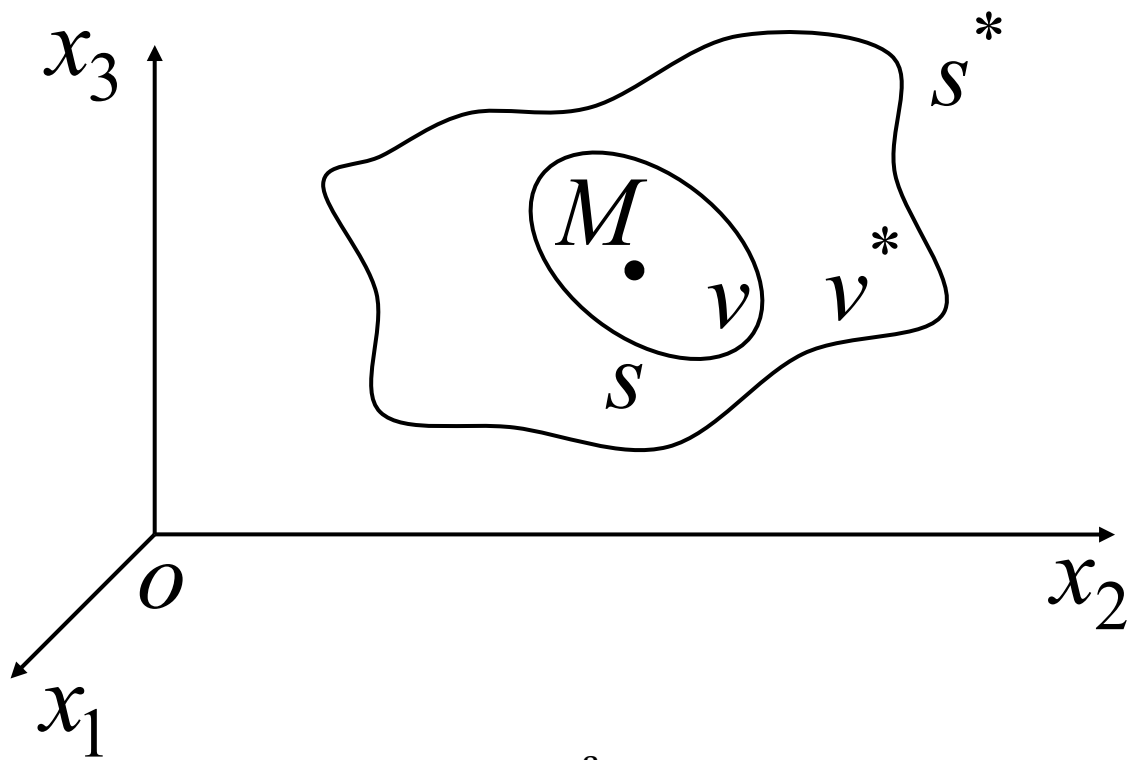
$$\dot{\mathbf{K}} = \int_v \mathbf{F} \rho dv + \int_s \boldsymbol{\tau} ds, \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_v \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho dv + \int_s \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} ds. \quad (2.35)$$

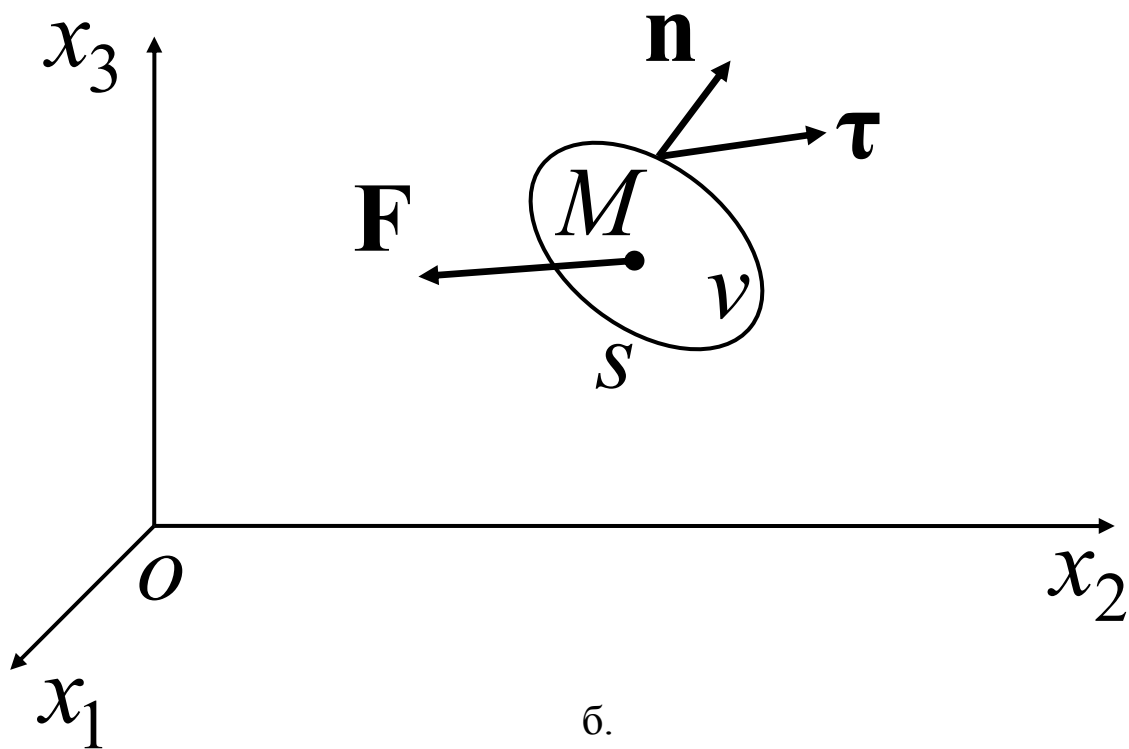
Первые члены правой части — это главный вектор и главный момент внешних массовых сил (2.27) и (2.28) при $\mathbf{m} = 0$, а вторые — главный вектор и главный момент внешних поверхностных сил (2.23) и (2.24), соответственно взятых при $\boldsymbol{\mu} = 0$.

Количество движения и момент количества движения равны, соответственно

$$\mathbf{K} = \int_v \mathbf{v} \rho dv, \quad \mathbf{L} = \int_v \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dv. \quad (2.36)$$



а.



б.

Рис. 2.3. Материальное тело и его часть

Дифференцирование по времени осуществляется по формулам (2.19), (2.20).

$$\dot{\mathbf{K}} = \int_v \dot{\mathbf{v}} \rho dv, \quad (2.37)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_v (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) \rho dv.$$

Слагаемое $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}$ равно нулю, потому что $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, а $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$. Так что

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_v \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \rho dv. \quad (2.38)$$

Подставив (2.37) в (2.34), а (2.38) в (2.35), запишем уравнения динамики материального тела в следующей форме

$$\int_s \boldsymbol{\tau} ds + \int_v (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \rho dv = 0, \quad (2.39)$$

$$\int_s \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} ds + \int_v \mathbf{r} \times (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \rho dv = 0.$$

Для последующего удобно во втором уравнении поменять знак, т.е. изменить порядок векторов в векторных произведениях. Получаем

$$\int_s \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r} ds + \int_v (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \rho \times \mathbf{r} dv = 0. \quad (2.40)$$

Замечание 2.2. Важная особенность этих уравнений состоит в том, что они могут быть записаны для произвольного куска материального тела. Так что объем v является произвольным, конечно, в пределах исходного материального тела, изображенного на рис. 2.3а.

Замечание 2.3. Из исходного материального тела можно выделить бесконечно много кусков. И для каждого куска можно написать уравнения (2.39) и (2.40). Так что таких пар уравнений бесконечно много.

2.6. Условия выполнения интегральных уравнений динамики деформируемых тел при непрерывном векторе напряжений

В этом разделе будут сформулированы необходимые и достаточные условия выполнения интегральных уравнений динамики (2.39) и (2.40) в случае, когда вектор напряжений непрерывен.

В разделе 2.4 было предложено линейное представление вектора поверхностной нагрузки $\boldsymbol{\tau}$ в форме (2.32).

Тогда первое уравнение динамики (2.39) принимает вид

$$\int_s \mathbf{a} ds + \int_s \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} ds + \int_v (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \rho dv = 0. \quad (2.41)$$

Рассмотрим различные частные случаи.

Пусть тензор $\boldsymbol{\sigma}$ является дифференцируемым по пространственным координатам в области $v^* + s^*$, а вектор \mathbf{a} — непрерывным.

Воспользовавшись формулой Остроградского – Гаусса (2.89) из [9]

$$\int_s \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} ds = \int_v \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dv,$$

преобразуем уравнение (2.41) к следующей форме

$$\int_s \mathbf{a} ds + \int_v (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) dv = 0. \quad (2.42)$$

Пусть теперь выделенный кусок материального тела $v + s$ представляет шар малого радиуса δ с центром в точке M , а подынтегральные функции в обоих интегралах непрерывны, а значит почти постоянны в пределах областей интегрирования. Тогда получим, выполнив элементарное интегрирование

$$4\pi\delta^2 \mathbf{a} + \frac{4}{3}\pi\delta^3 (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) = 0.$$

Деление на площадь поверхности шара $4\pi\delta^2$ дает

$$\mathbf{a} + \frac{1}{3}\delta (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) = 0. \quad (2.43)$$

Выбираем радиус шара очень малым, т.е. принимаем $\delta \rightarrow 0$. Тогда из (2.43) получаем, что

$$\mathbf{a} = 0 \quad (2.44)$$

в центре M выделенного шара малого радиуса (рис. 2.4). Но ведь мы можем выбрать шар так, что его центр окажется в любой точке объема v^* . Таким образом, условие (2.44) имеет место в любой точке объема v^* , если в ней вектор \mathbf{a} непрерывен, а тензор $\boldsymbol{\sigma}$ непрерывно дифференцируем. Можно ли распространить (2.44) и на поверхность тела s^* . Конечно, да! Для того чтобы убедиться в этом достаточно расположить выделенный малый шар, так чтобы его центр N оказался на поверхности s^* , как это показано на рис. 2.4. В качестве выделенной области выбираем полушар, расположенный внутри v^* .

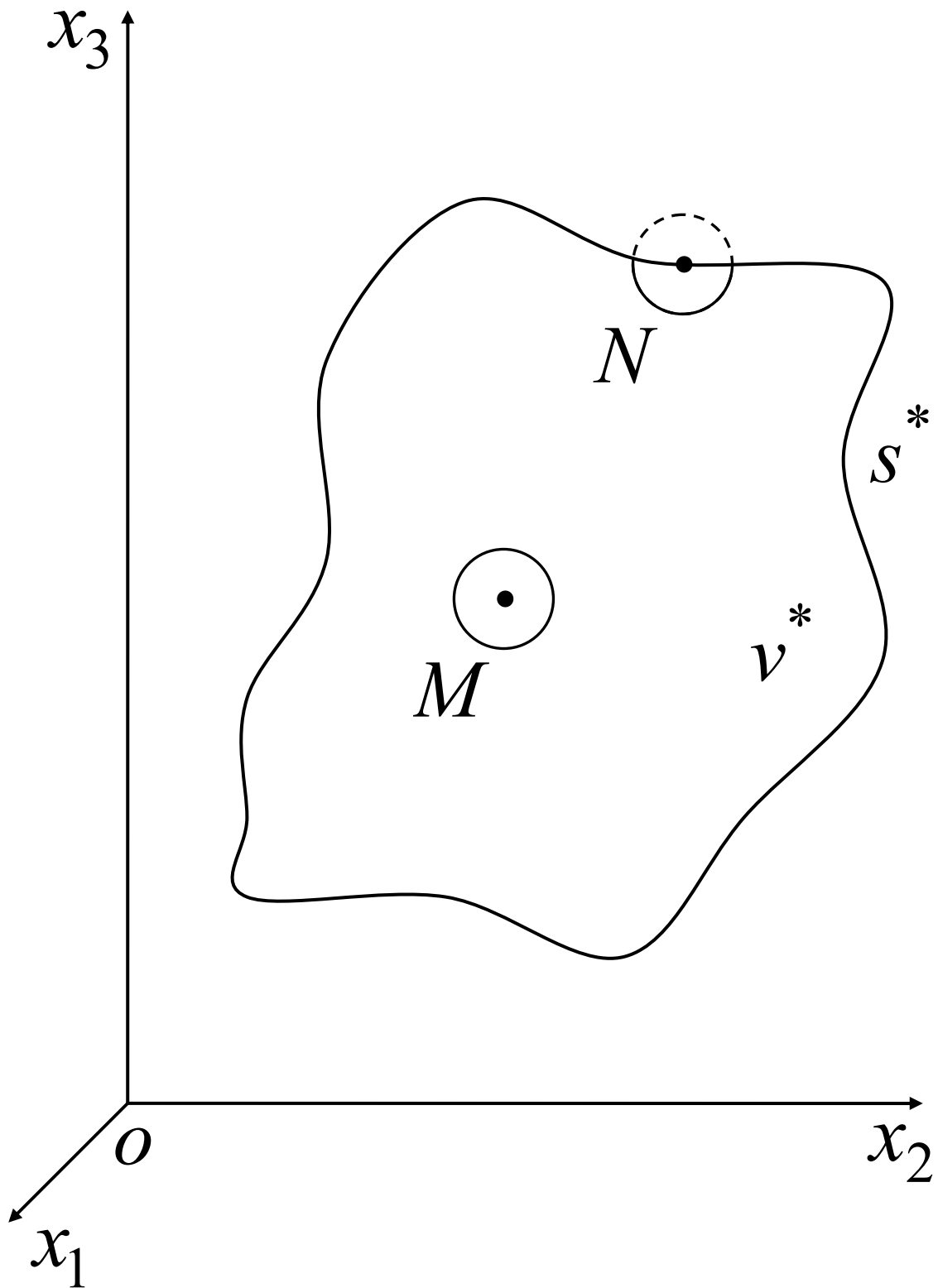


Рис. 2.4. Материальная точка внутри материального тела и на его поверхности

Выполнив интегрирование в (2.42) для этого случая но только в пределах полушара, найдем

$$\left(2\pi\delta^2 + \pi\delta^2\right)\alpha + \frac{2}{3}\pi\delta^3(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) = 0.$$

Поделив обе части этого равенства на площадь поверхности полушара $3\pi\delta^2$, получим

$$\alpha + \frac{2}{9}\delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) = 0.$$

Принимая $\delta \rightarrow 0$, и в этом случае находим

$$\alpha = 0.$$

Таким образом, (2.44) выполняется в $v^* + s^*$. Но тогда во всей области $v^* + s^*$, в силу (2.32), имеет место более простое, чем (2.32), представление вектора напряжения

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.45)$$

Снова обращаемся к (2.43) и учитываем (2.44). Получаем условие

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) = 0, \quad (2.46)$$

которое должно выполняться только в пределах всего объема v^* , но не на s^* .

Итак, мы убедились, что условия (2.44) и (2.46) необходимы для выполнения первого из интегральных уравнений динамики (2.39). Легко видеть, что они и достаточны. Действительно, уравнение (2.39) с помощью (2.32) преобразуется к виду (2.41) и далее к виду (2.42). А последнее удовлетворяется, если выполнены уравнения (2.44) и (2.46). Следствием первого из них является знаменитое представление (2.45) для вектора напряжений. В литературе оно называется формулой Коши. Появившийся в ней тензор $\boldsymbol{\sigma}$ носит название тензора напряжений. Уравнение (2.46) называется дифференциальным уравнением динамики. Оно — следствие первого уравнения динамики (2.39).

Теперь выясним, какие ограничения накладывает второе интегральное уравнение динамики (2.40). Предыдущий анализ показал, что вектор напряжения выражается формулой (2.45), и тогда уравнение (2.40) принимает вид

$$\int_s (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{r} ds + \int_v \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \times \mathbf{r} dv = 0.$$

Используя формулу Остроградского – Гаусса

$$\int_s (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{r} ds = \int_s \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) ds = \int_v \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) dv,$$

преобразуем последнее уравнение к следующему виду

$$\int_v (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \times \mathbf{r}) dv = 0. \quad (2.47)$$

Как и раньше, принимаем, что выделенный кусок материального тела представляет шар малого радиуса δ с центром в некоторой точке M , а подынтегральная функция в (2.47) непрерывна, а значит почти постоянна в пределах шара. Выполняя элементарное интегрирование, получим

$$\frac{4}{3} \pi \delta^3 (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \times \mathbf{r}) = 0.$$

Отсюда находим, что в точке M имеем уравнение

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \times \mathbf{r} = 0. \quad (2.48)$$

Результат действия оператора Гамильтона на векторное произведение здесь вычисляем по формуле Лейбница, специально приспособленной для произведений тензоров и векторов

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) = \overset{\rightarrow}{\nabla} \cdot \left(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{r} \right) + \overset{\uparrow}{\nabla} \cdot \left(\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\sigma}} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{r}} \right).$$

Напоминаем, что в соответствии с разъяснениями второй главы [9] стрелка выходит от оператора Гамильтона и направлена в сторону объекта, на который действует оператор Гамильтона, как оператор дифференцирования.

Теперь следует использовать правила векторной и тензорной алгебры и преобразовать стоящие справа выражения к такому виду, чтобы оператор Гамильтона и объект, на который он действует, как оператор дифференцирования, оказались рядом. Находим

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) = \left(\overset{\rightarrow}{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\boldsymbol{\sigma}} \right) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma} \times \cdot \left(\overset{\downarrow}{\mathbf{r}} \overset{\leftarrow}{\nabla} \right). \quad (2.49)$$

Теперь уже отпала необходимость использовать стрелки: ведь и оператор Гамильтона и объекты, на которые он действует, оказались в одной скобке, а операции в скобке выполняются в первую очередь! Так что (2.49) принимает вид

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma} \times \cdot (\mathbf{r} \nabla).$$

Подстановка этого результата в (2.48) дает

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\sigma} \times \cdot (\mathbf{r} \nabla) = 0. \quad (2.50)$$

Обнаруживаем, что в скобке первого произведения стоит левая часть уравнения динамики (2.46). Но ведь она равна нулю! Так что, обращается в нуль и все произведение. Далее, имеем

$$\mathbf{r} \nabla = \mathbf{E}.$$

Таким образом, имеем по (2.50)

$$\boldsymbol{\sigma} \times \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Сравнивая это условие с (1.63) из [9], приходим к заключению о том, что слева стоит сопутствующий вектор тензора напряжений

$$-2\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\sigma}} = 0.$$

Это уравнение утверждает, что вектор, сопутствующий тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, равен нулю. Но такое бывает тогда и только тогда, когда тензор симметричен

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.51)$$

Это второе уравнение динамики.

Подведем итог: если тензор напряжений непрерывно дифференцируем по пространственной координате \mathbf{r} , а плотность ρ , массовая сила и ускорение непрерывны, то необходимыми и достаточными условиями выполнения интегральных уравнений динамики деформируемого тела являются уравнения (2.46) и (2.51), причем вектор напряжения внутри тела и на его поверхности вычисляется по формуле Коши (2.45).

Замечание 2.4. Обращаем внимание читателя на то, что тензор напряжений симметричен в точках объема тела v^* , но не на его поверхности s^* .

2.7. Условия выполнения интегральных уравнений динамики деформируемых тел при кусочно-непрерывном векторе напряжения

Пусть вектор напряжения $\boldsymbol{\tau}$ является кусочно-непрерывным. Пусть, более того, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ является кусочно-дифференцируемым, а значит и кусочно-непрерывным, а вектор $\boldsymbol{\alpha}$ — кусочно-непрерывным.

Допустим, что имеется всего лишь одна поверхность Σ разрыва непрерывности. Ситуация изображена на рис. 2.5. Поверхностью разрыва Σ область пространства v^* , занятая деформируемым телом в текущий момент времени, разделяется на две области v_+^* и v_-^* . Точно так же разделяется и поверхность s^* — на s_+^* и s_-^* , как это тоже показано на рис. 2.5.

Рассмотрим часть деформируемого тела, расположенную выше поверхности разрыва. В ней непрерывны α , σ и τ , и тогда по результатам предыдущего раздела находим

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= 0 && \text{в } v_+^* + s_+^* + \Sigma, \\ \tau_+ &= \mathbf{n}_+ \cdot \sigma_+ && \text{в } v_+^* + s_+^* + \Sigma, \\ \nabla \cdot \sigma_+ + \rho_+ (\mathbf{F}_+ - \dot{\mathbf{v}}_+) &= 0 && \text{в } v_+^*, \\ \sigma_+^T &= \sigma_+ && \text{в } v_+^*. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Для части тела, расположенной ниже поверхности разрыва, по аналогии находим

$$\begin{aligned} \alpha_- &= 0 && \text{в } v_-^* + s_-^* + \Sigma, \\ \tau_- &= \mathbf{n}_- \cdot \sigma_- && \text{в } v_-^* + s_-^* + \Sigma, \\ \nabla \cdot \sigma_- + \rho_- (\mathbf{F}_- - \dot{\mathbf{v}}_-) &= 0 && \text{в } v_-^*, \\ \sigma_-^T &= \sigma_- && \text{в } v_-^*. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Таким образом, оказывается, что вектор α равен нулю во всем теле

$$\alpha = 0 \quad \text{в } v^* + s^*,$$

и, значит, не имеет разрыва, несмотря на разрыв непрерывности тензора напряжений и вектора напряжения τ . Далее, вектор напряжения в силу (2.32) имеет единое выражение (2.45)

$$\tau = \mathbf{n} \cdot \sigma,$$

а тензор напряжений имеет различные значения в областях над поверхностью разрыва и под ней: σ_+ и σ_- .

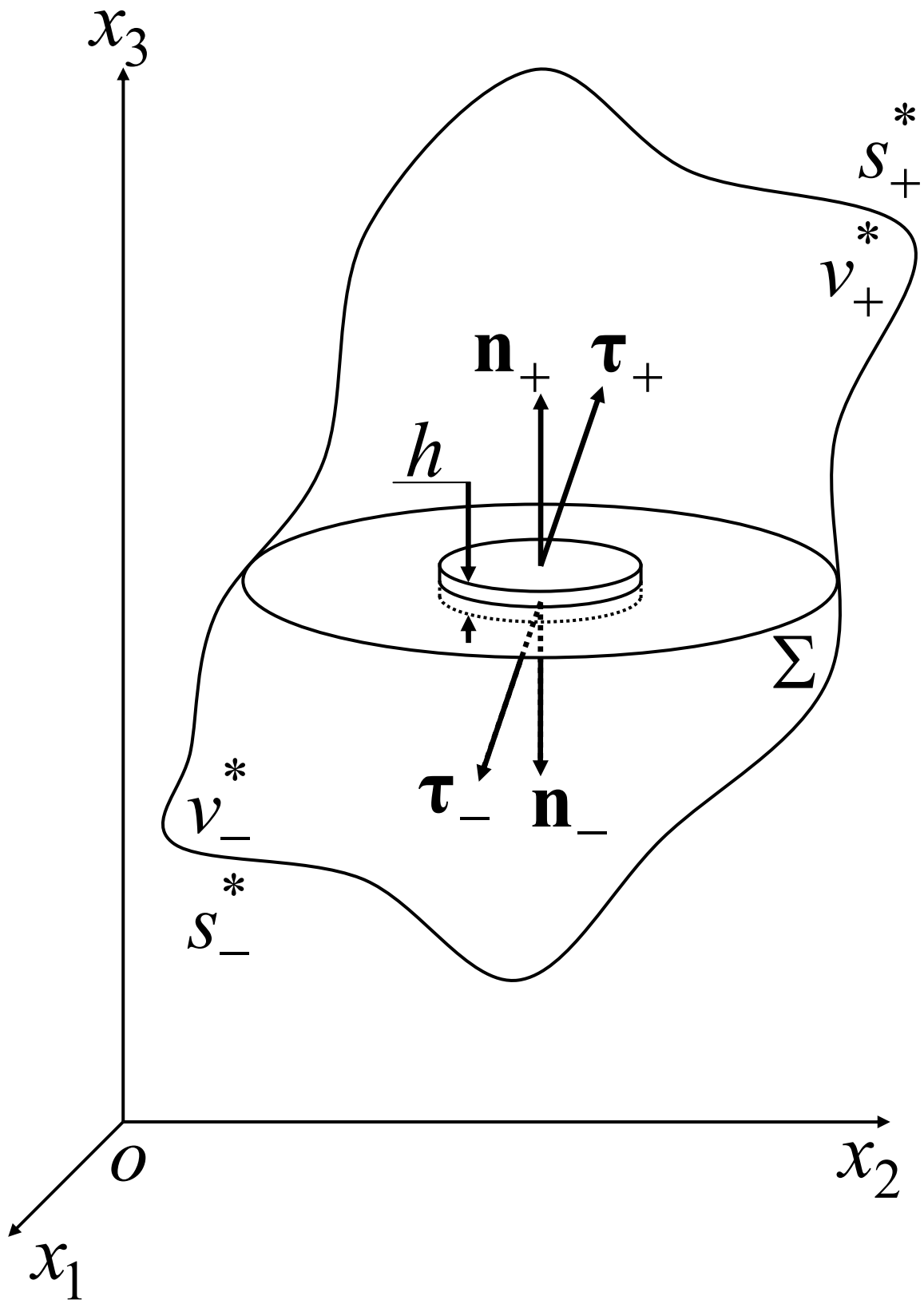


Рис. 2.5. Материальное тело с разрывом напряжений на поверхности Σ

Выделим из деформируемого тела малое цилиндрическое тело с радиусом δ и с высотой h . Центр его расположим точно в точке M , лежащей на поверхности разрыва Σ . Такой цилиндр изображен на рис. 2.5. Полагаем, что верхний торец цилиндра полностью расположен в v_+^* , а нижний в v_-^* . На рис. 2.5 показаны внешние нормали к торцевым границам и действующие на них векторы напряжений. Очевидно, что

$$\mathbf{n}_+ = \mathbf{n}_\Sigma, \quad \mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_\Sigma, \quad \boldsymbol{\tau}_+ = \mathbf{n}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\sigma}_+, \quad \boldsymbol{\tau}_- = -\mathbf{n}_\Sigma \cdot \boldsymbol{\sigma}_-, \quad (2.54)$$

где \mathbf{n}_Σ — нормаль к поверхности Σ в точке M — центре цилиндра.

Составим первое интегральное уравнение динамики (2.39) для этого цилиндрического тела. При этом интеграл по поверхности разобьем на три интеграла: по верхнему торцу s_{T+} , нижнему торцу s_{T-} , и, наконец, по боковой поверхности $s_{\bar{6}}$.

$$\int_s \boldsymbol{\tau} ds = \int_{s_{T+}} \boldsymbol{\tau}_+ ds + \int_{s_{T-}} \boldsymbol{\tau}_- ds + \int_{s_{\bar{6}}} \boldsymbol{\tau} ds.$$

Получим

$$\int_{s_{T+}} \boldsymbol{\tau}_+ ds + \int_{s_{T-}} \boldsymbol{\tau}_- ds + \int_{s_{\bar{6}}} \boldsymbol{\tau} ds + \int_v \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) dv = 0. \quad (2.55)$$

Воспользуемся тождествами

$$\begin{aligned} \int_{s_{T+}} \boldsymbol{\tau}_+ ds &= \int_{s_{T+}} \boldsymbol{\tau}_+(M) ds + \int_{s_{T+}} (\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_+(M)) ds, \\ \int_{s_{T-}} \boldsymbol{\tau}_- ds &= \int_{s_{T-}} \boldsymbol{\tau}_-(M) ds + \int_{s_{T-}} (\boldsymbol{\tau}_- - \boldsymbol{\tau}_-(M)) ds, \end{aligned}$$

в которых появились предельные значения $\boldsymbol{\tau}_+(M)$ и $\boldsymbol{\tau}_-(M)$ при стремлении к точке M поверхности Σ из областей, расположенных выше и ниже поверхности разрыва Σ . Но ведь последние не зависят от координаты \mathbf{r} , и тогда можно провести интегрирование в первых слагаемых правых частей. Это дает

$$\begin{aligned} \int_{s_{T+}} \boldsymbol{\tau}_+ ds &= \pi\delta^2 \boldsymbol{\tau}_+(M) + \int_{s_{T+}} (\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_+(M)) ds, \\ \int_{s_{T-}} \boldsymbol{\tau}_- ds &= \pi\delta^2 \boldsymbol{\tau}_-(M) + \int_{s_{T-}} (\boldsymbol{\tau}_- - \boldsymbol{\tau}_-(M)) ds. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнение (2.55) и, перенося все интегралы в правую часть, получим

$$\pi\delta^2 (\boldsymbol{\tau}_+(M) + \boldsymbol{\tau}_-(M)) = - \left(\int_{s_0} \boldsymbol{\tau} ds + \int_v \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) dv + \int_{s_{T+}} (\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_+(M)) ds + \int_{s_{T-}} (\boldsymbol{\tau}_- - \boldsymbol{\tau}_-(M)) ds \right).$$

Разделив обе части этого равенства на $\pi\delta^2$, найдем

$$\boldsymbol{\tau}_+(M) + \boldsymbol{\tau}_-(M) = - \frac{1}{\pi\delta^2} \left(\int_{s_0} \boldsymbol{\tau} ds + \int_v \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) dv + \int_{s_{T+}} (\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_+(M)) ds + \int_{s_{T-}} (\boldsymbol{\tau}_- - \boldsymbol{\tau}_-(M)) ds \right).$$

Оценим по величине правую часть этого равенства. Придем к следующему неравенству

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\tau}_+(M) + \boldsymbol{\tau}_-(M)| \leq \frac{1}{\pi\delta^2} & \left(\int_{s_0} |\boldsymbol{\tau}| ds + \int_v |\rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})| dv + \right. \\ & \left. + \int_{s_{T+}} |\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_+(M)| ds + \int_{s_{T-}} |\boldsymbol{\tau}_- - \boldsymbol{\tau}_-(M)| ds \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Покажем, что правая часть может быть сделана сколь угодно малой.

Допустим, что в пределах всего тела выполняются оценки

$$|\boldsymbol{\tau}| < M \quad |\rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})| < N,$$

где M и N постоянные величины.

Тогда для первых двух интегралов правой части найдем следующие оценки

$$\begin{aligned} \int_{s_0} |\boldsymbol{\tau}| ds & < M 2\pi\delta h, \\ \int_v |\rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})| dv & < N\pi\delta^2 h. \end{aligned}$$

Далее, по предположению, вектор напряжения $\boldsymbol{\tau}$ кусочно-непрерывен. Следовательно, по любым сколь угодно малым ε_+ , ε_- можно указать такое Δ , что неравенство

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M| < \Delta \quad (2.57)$$

влечет за собой неравенства

$$\begin{aligned} |\tau_+ - \tau_+(M)| &< \varepsilon_+, \\ |\tau_- - \tau_-(M)| &< \varepsilon_-. \end{aligned}$$

А это означает, что имеют место оценки

$$\begin{aligned} \int_{s_{T+}} |\tau_+ - \tau_+(M)| ds &< \varepsilon_+ \pi \delta^2, \\ \int_{s_{T-}} |\tau_- - \tau_-(M)| ds &< \varepsilon_- \pi \delta^2. \end{aligned}$$

Использование всех этих оценок в (2.56) дает

$$|\tau_+(M) + \tau_-(M)| < (2M + \delta N) \frac{h}{\delta} + \varepsilon_+ + \varepsilon_-. \quad (2.58)$$

Очевидно, что условие (2.57) выполняется при выполнении более сильного неравенства

$$\sqrt{\delta^2 + h^2} < \Delta$$

или

$$\delta \sqrt{1 + \left(\frac{h}{\delta}\right)^2} < \Delta. \quad (2.59)$$

Выбираем сколь угодно малыми значения $\frac{h}{\delta}$, ε_+ и ε_- и, в силу (2.58), получаем условие

$$\tau_+(M) + \tau_-(M) = 0. \quad (2.60)$$

Малость ε_+ и ε_- может быть обеспечена выполнением (2.59), т.е. выбором достаточно малого значения радиуса цилиндра δ .

Вспомним теперь обозначения, введенные в уравнениях (2.54). С их помощью преобразуем (2.60) к следующему эквивалентному виду

$$\mathbf{n}_\Sigma \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) = 0. \quad (2.61)$$

Подведем итог: главный результат этого раздела состоит в установлении условия (2.60) или (2.61) на поверхности разрыва непрерывности напряжений.

Замечание 2.5. Легко включить в рассмотрение такой гипотетический случай, когда поверхность разрыва нагружена внешней поверхностной нагрузкой τ_Σ . Аналог уравнения (2.60) имеет вид

$$\tau_+ + \tau_- + \tau_\Sigma = 0,$$

тогда как аналогом уравнения (2.61) является следующее уравнение

$$\mathbf{n}_\Sigma \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) + \boldsymbol{\tau}_\Sigma = 0.$$

2.8. Механический смысл координат тензора напряжений

Как всякий тензор второго ранга, тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ может быть разложен по элементам тензорного базиса

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl}. \quad (2.62)$$

Вычислим вектор напряжения на площадке с нормалью

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_s.$$

По формуле Коши (2.45) находим

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl}) = \delta_{ks} \mathbf{i}_l \sigma_{kl}.$$

Просуммируем по повторяющемуся индексу k . Все члены этой суммы обращаются в нуль за исключением случая $k = s$, когда символ Кронекера обращается в единицу. Результат таков

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{i}_l \sigma_{sl}.$$

Спроектируем этот вектор на ось \mathbf{i}_r . Получим

$$\boldsymbol{\tau}_s \cdot \mathbf{i}_r = \delta_{lr} \sigma_{sl}.$$

Суммируя по индексу l , найдем

$$\boldsymbol{\tau}_s \cdot \mathbf{i}_r = \sigma_{sr}.$$

Эта формула позволяет выявить механический смысл координаты τ_{sr} тензора напряжений: координата τ_{sr} равна проекции на ось ox_r вектора напряжения, действующего на площадке с внешней нормалью, направленной вдоль оси ox_s .

На рис. 2.6 изображен типичный прямоугольный параллелепипед. На его гранях с векторами внешних нормалей, направленными вдоль положительных направлений координатных осей, показаны проекции векторов напряжений.

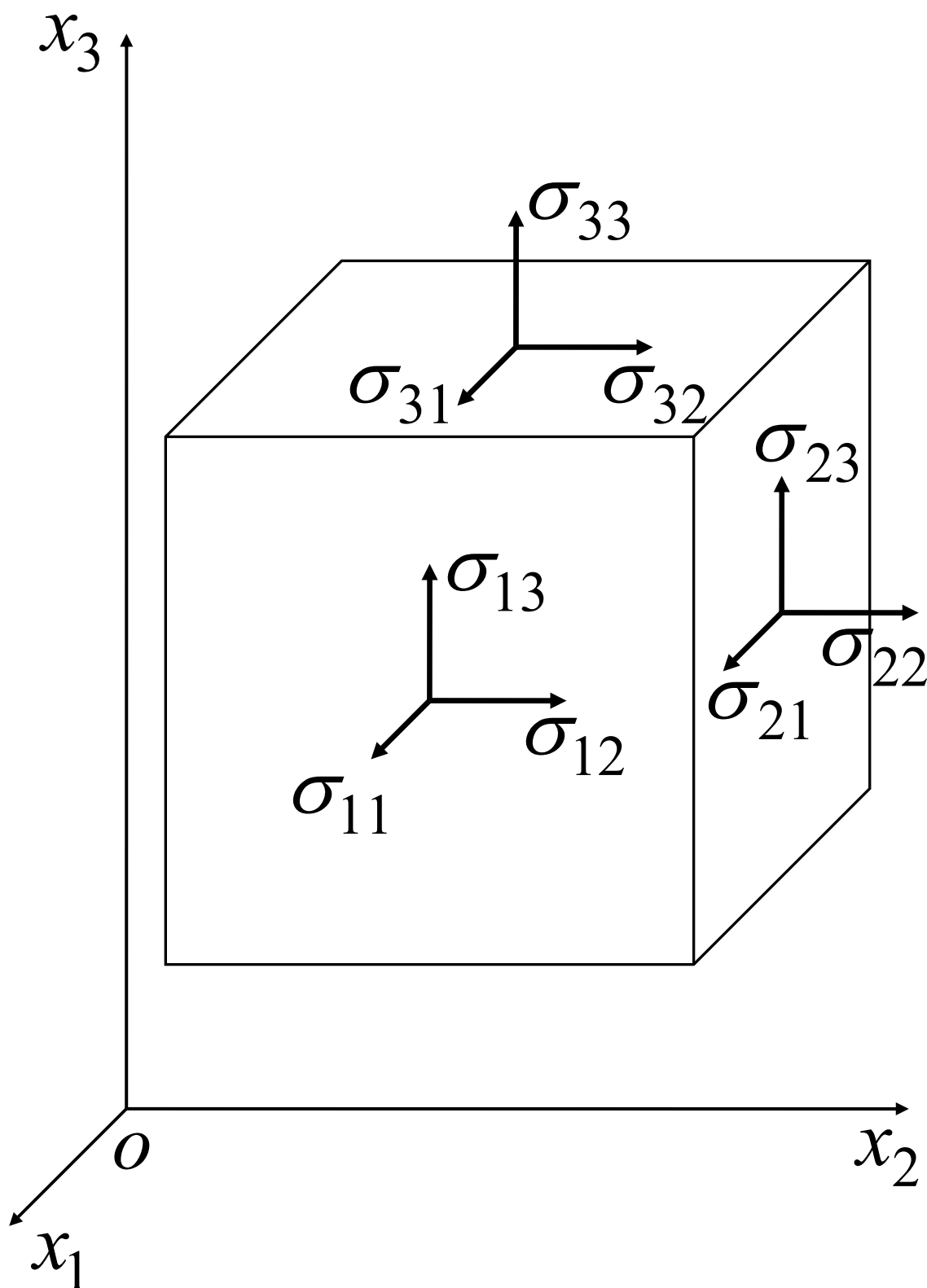


Рис. 2.6. Напряжения на гранях параллелепипеда с нормальями, направленными вдоль координатных линий

На рис. 2.7 изображен тот же самый параллелепипед. Но, теперь, показаны проекции векторов напряжений, действующих на гранях, имеющих внешние нормали, направленные вдоль отрицательных направлений координатных осей. Последние вычислены по той же самой формуле Коши, однако теперь пришлось принять

$$\mathbf{n} = -\mathbf{i}_s.$$

Так что, получилось

$$\boldsymbol{\tau}_{-s} = -\mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl}) = -\mathbf{i}_l \sigma_{sl}.$$

Проекция на ось ox_r оказалась равной

$$\boldsymbol{\tau}_{-s} \cdot \mathbf{i}_r = -\sigma_{sr}.$$

Итак, проекция на ось ox_r векторов напряжений, действующих на площадках с внешними нормальными, направленными против осей ox_s , оказались равными $-\sigma_{sr}$. На рис. 2.7 они изображены векторами, направленными противоположно тому, как это было сделано на рис. 2.6.

В наших рассуждениях появилось девять координат тензора напряжений. Координаты σ_{11} , σ_{22} и σ_{33} представляют нормальные напряжения, ибо векторы, их изображающие на рис. 2.6 и 2.7, направлены по нормальным к тем площадкам, на которых они действуют. Остальные координаты тензора напряжений являются касательными напряжениями. Поскольку тензор напряжений симметричен, имеем

$$\sigma_{lk} = \sigma_{kl}. \quad (k \neq l) \quad (2.63)$$

Так что независимых касательных напряжений всего три: σ_{12} , σ_{13} и σ_{23} .

Запишем формулу Коши в координатной форме. Зададим входящие в нее векторы в следующем виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_m \tau_m,$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_r n_r.$$

Тензор напряжений возьмем в виде (2.62). Тогда получим

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_m \tau_m = (\mathbf{i}_r n_r) \cdot (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl}) = \delta_{rk} n_r \mathbf{i}_l \sigma_{kl}.$$

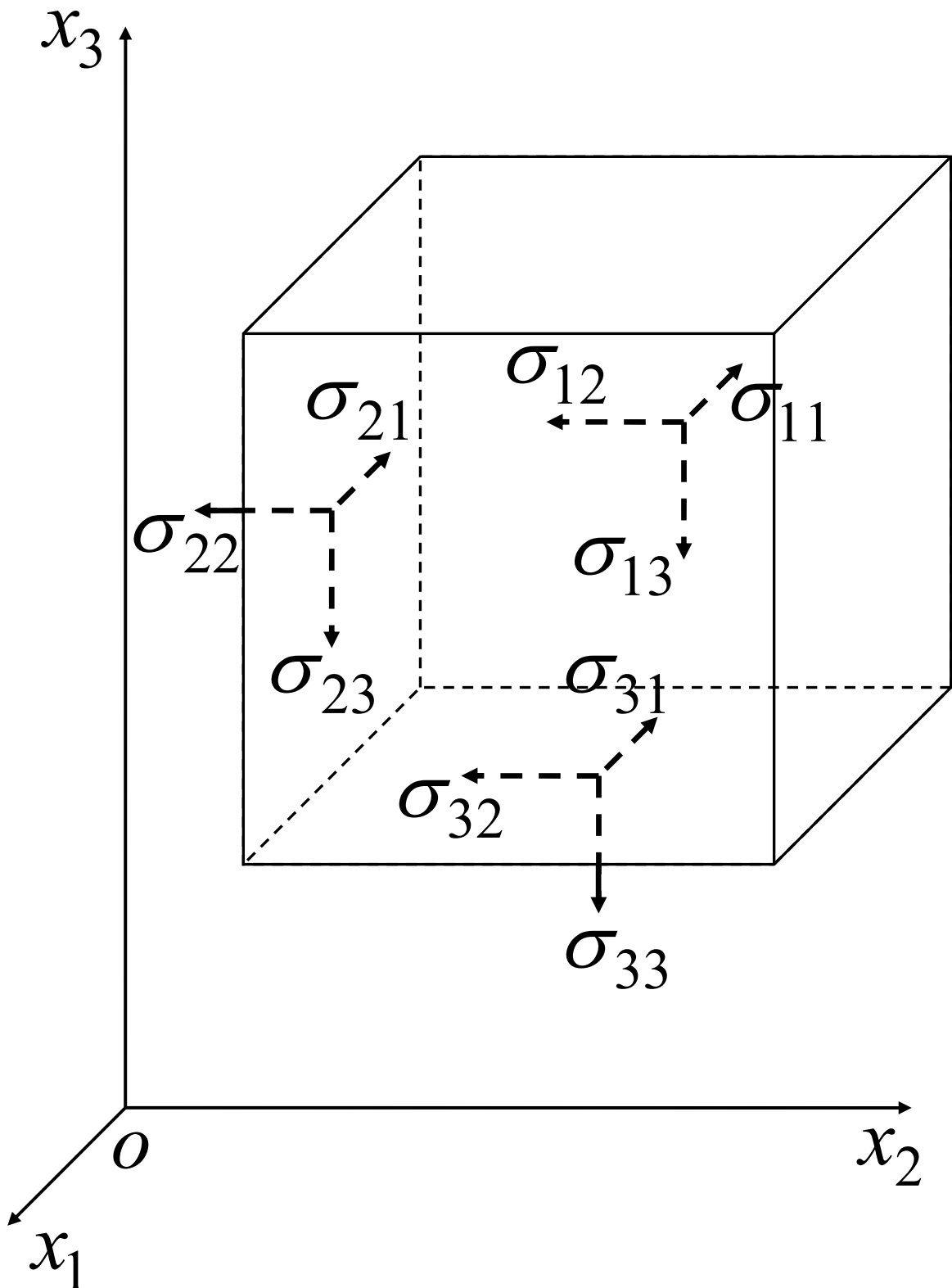


Рис. 2.7. Напряжения на гранях параллелепипеда с нормальями, направленными вдоль отрицательных направлений осей координат

В полученном выражении проведем суммирование по повторяющемуся индексу r . При этом учтем, что символ Кронекера δ_{rk} обращается в единицу только при $r = k$; при других значениях r он равен нулю. В результате находим

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_m \tau_m = \mathbf{i}_l n_k \sigma_{kl}.$$

В представлении вектора $\boldsymbol{\tau}$ индекс m является индексом суммирования и пробегает значения 1, 2, 3. Поэтому ничего не изменится, если этот индекс заменить на какой-нибудь другой, например на l . Тогда получим

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_l \tau_l = \mathbf{i}_l n_k \sigma_{kl}.$$

Здесь равенство имеет место только в случае, когда координаты векторов, связанных знаком равенства, равны. Так что

$$\tau_l = n_k \sigma_{kl}. \quad (2.64)$$

Это и есть формула Коши, записанная в координатной форме.

Вероятно, следует напомнить, что в (2.64) индекс l принимает последовательно три значения: 1, 2 и 3, а индекс k является индексом суммирования, по которому ведется суммирование от 1 до 3, в соответствии с правилом Эйнштейна. Так что, в развернутом виде формула Коши записывается в следующей форме

$$\begin{aligned} \tau_1 &= n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}, \\ \tau_2 &= n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}, \\ \tau_3 &= n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

По поводу формулы Коши следует высказать еще следующее суждение. Областью ее определения являются все поверхности, которые можно провести во всем теле $v^* + s^*$, включая внешнюю поверхность s^* и возможные поверхности разрыва напряжений, и любые поверхности, их пересекающие.

Выше было доказано, что на поверхности разрыва напряжений должно выполняться условие сопряжения (2.61). Оно явилось следствием выполнения уравнения динамики для бесконечно тонкого цилиндрического тела, ориентированного так, что нормаль к его торцу совпадает с нормалью к поверхности разрыва напряжения \mathbf{n}_Σ , и центр которого лежит на поверхности разрыва.

Представим еще одну интерпретацию условия (2.61). Для этого рассматриваем ситуацию, изображенную на рис. 2.8. Опять имеем одну поверхность разрыва напряжения Σ . Через точку M на ней проводим плоскость Θ , не являющуюся касательной к Σ . Нормаль к Θ обозначаем просто \mathbf{n} . На плоскости Θ выбираем две точки N и P , расположенные около точки M бесконечно близко к ней. Точка N расположена выше поверхности Σ . Тогда по (2.52) имеем

$$\boldsymbol{\tau}_+ = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+. \quad (2.66)$$

Точка P расположена ниже поверхности Σ . Тогда по (2.53) находим

$$\boldsymbol{\tau}_- = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_-. \quad (2.67)$$

Поскольку точки N и P расположены бесконечно близко к M , можно рассматривать (2.66), как предельное значение вектора напряжения на плоскости Θ с нормалью \mathbf{n} при стремлении точки N к M из области, расположенной выше Σ , а (2.67), как предельное значение вектора напряжения на этой же плоскости при стремлении точки P к M , но, теперь, уже из области, расположенной ниже Σ . Составим разность (2.66) и (2.67)

$$\boldsymbol{\tau}_+ - \boldsymbol{\tau}_- = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-). \quad (2.68)$$

В силу (2.61) эта разность обращается в нуль, если \mathbf{n} совпадает с \mathbf{n}_Σ , т.е. если плоскость Θ касается поверхности разрыва Σ в точке M . Получен на первый взгляд парадоксальный результат: вектор напряжения, действующий на поверхности разрыва напряжения как раз то и не имеет разрыва! И только вектор напряжения на площадке с любой другой нормалью $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}_\Sigma$ имеет шанс оказаться разрывным!

Это же самое обстоятельство можно обнаружить, используя следующее разложение тензора напряжений около точки M .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \mathbf{n}_\Sigma (\mathbf{n}_\Sigma \sigma_{nn} + \mathbf{l}_\Sigma \sigma_{nl} + \mathbf{m}_\Sigma \sigma_{nm}) + \\ & + \mathbf{l}_\Sigma (\mathbf{n}_\Sigma \sigma_{ln} + \mathbf{l}_\Sigma \sigma_{ll} + \mathbf{m}_\Sigma \sigma_{lm}) + \\ & + \mathbf{m}_\Sigma (\mathbf{n}_\Sigma \sigma_{mn} + \mathbf{l}_\Sigma \sigma_{ml} + \mathbf{m}_\Sigma \sigma_{mm}), \end{aligned}$$

где \mathbf{l}_Σ и \mathbf{m}_Σ — ортогональные векторы, касательные к поверхности Σ .

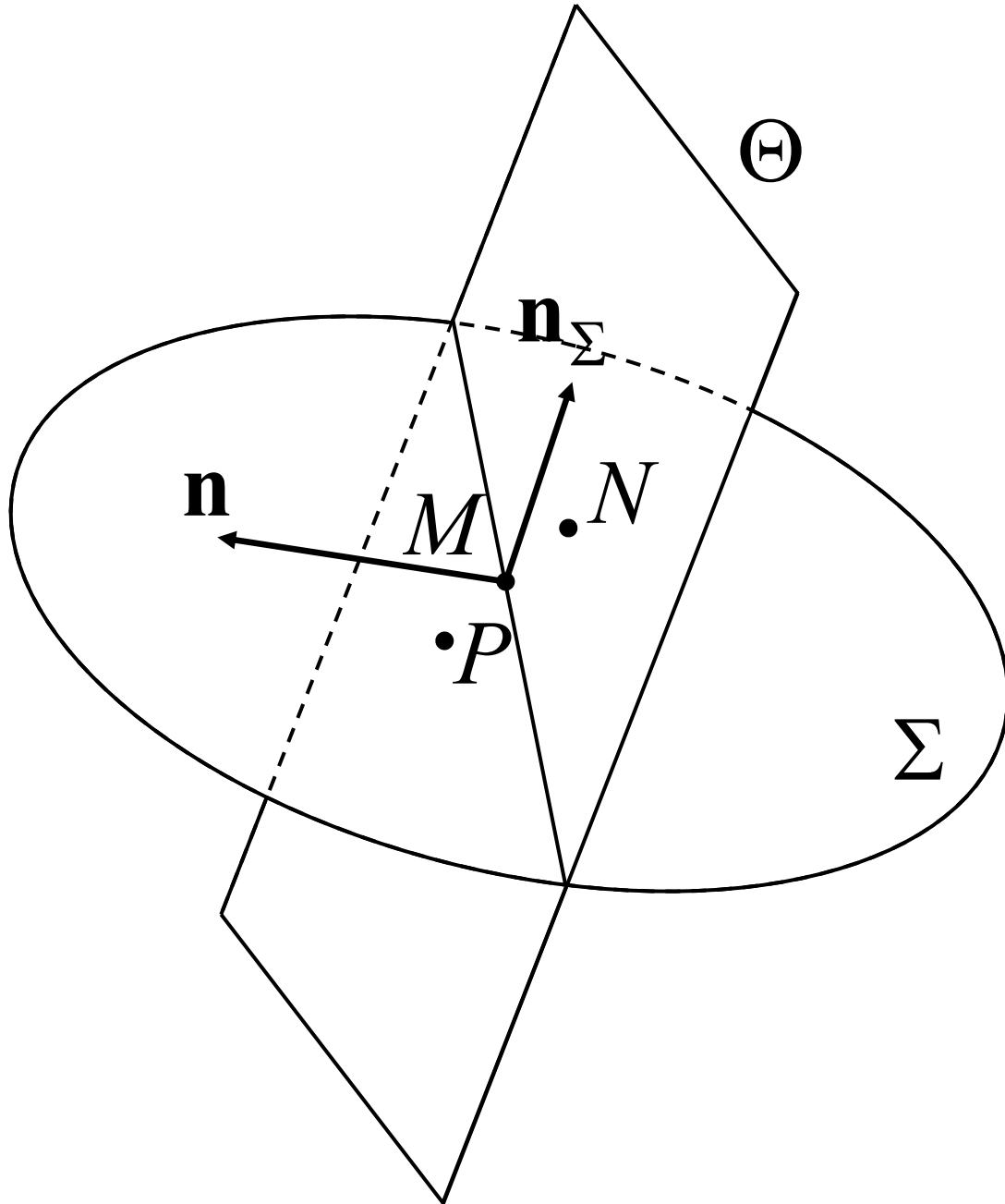


Рис. 2.8. Поверхность разрыва напряжений и плоскость, пересекающая ее

Тогда условие (2.61) запишется в виде

$$\mathbf{n}_\Sigma \sigma_{nn}^+ + \mathbf{l}_\Sigma \sigma_{nl}^+ + \mathbf{m}_\Sigma \sigma_{nm}^+ - \mathbf{n}_\Sigma \sigma_{nn}^- - \mathbf{l}_\Sigma \sigma_{nl}^- - \mathbf{m}_\Sigma \sigma_{nm}^- = 0.$$

В проекциях на оси \mathbf{n}_Σ , \mathbf{l}_Σ , \mathbf{m}_Σ найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^+ &= \sigma_{nn}^-, \\ \sigma_{nl}^+ &= \sigma_{nl}^-, \\ \sigma_{nm}^+ &= \sigma_{nm}^-. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Итак, три координаты тензора напряжений обязаны быть непрерывными. Это как раз те координаты, которые составляют вектор напряжения на поверхности с нормалью \mathbf{n}_Σ . Оставшиеся координаты σ_{ln} , σ_{ll} , σ_{lm} , σ_{mn} , σ_{ml} , σ_{mm} могут иметь разрывы. Конечно, мы не забыли о том, что тензор напряжений удовлетворяет условию симметрии (2.51), так что имеем

$$\sigma_{lm} = \sigma_{ml}, \quad \sigma_{ln} = \sigma_{nl}, \quad \sigma_{nm} = \sigma_{mn}.$$

Таким образом, разрыв непрерывности терпят только следующие три координаты: σ_{ll} , σ_{mm} , σ_{ml} . Остальные три координаты σ_{nn} , σ_{nl} , σ_{nm} разрыва не имеют.

Так обстоят дела с координатами тензора напряжений в привилегированном базисе, в котором один из базисных векторов направлен по нормали к поверхности разрыва напряжений, а два другие — по касательным. А что будет в любом другом базисе, например, в базисе $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l$, порожденном основной координатной системой? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно иметь представление этих координат непосредственно через тензор $\boldsymbol{\sigma}$. Чтобы найти это представление, умножим тензор $\boldsymbol{\sigma}$ по (2.62) на вектор \mathbf{i}_s слева и на вектор \mathbf{i}_r справа. Получим

$$\mathbf{i}_s \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl}) \cdot \mathbf{i}_r = \delta_{sk} \sigma_{kl} \delta_{lr}.$$

Просуммируем это выражение по k и по l . Отличным от нуля окажется всего лишь одно слагаемое, в котором $k = s$ и $l = r$; символы Кронекера при этом оказываются равными единице. Так что, имеем

$$\mathbf{i}_s \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}_r = \sigma_{sr}$$

или

$$\sigma_{sr} = \mathbf{i}_s \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}_r. \quad (2.70)$$

Это равенство позволяет сделать заключение: все координаты тензора напряжений терпят разрыв! Следует, конечно, выразиться более осторожно: все координаты тензора напряжений в произвольно выбранном базисе будут иметь разрыв, если только нормаль \mathbf{n}_Σ к поверхности разрыва напряжений Σ не окажется параллельной ни одному из базисных векторов \mathbf{i}_k . А если окажется, то мы будем иметь рассмотренный выше привилегированный базис, то тогда три координаты будут иметь разрыв, а три другие никакого разрыва иметь не будут.

2.9. Дифференциальные уравнения динамики деформируемых тел

Обратимся к уравнению (2.46), полученному в разделе 2.6. Там мы его назвали дифференциальным уравнением динамики деформируемого тела. Уяснить для себя причину присвоения такого названия трудно, пробиваясь через довольно громоздкие рассуждения раздела 2.6. Поэтому рассмотрим немного другую процедуру его получения.

Обратимся к первому интегральному уравнению динамики материального тела в форме (2.39)

$$\int_s \boldsymbol{\tau} ds + \int_v (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \rho dv = 0$$

и воспользуемся главным достижением раздела 2.6 — формулой Коши (2.45) для вектора напряжения

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Тогда интегральное уравнение динамики примет вид

$$\int_s \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} ds + \int_v (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \rho dv = 0. \quad (2.71)$$

Воспользовавшись интегральной формулой Остроградского – Гаусса преобразуем интеграл по поверхности в интеграл по объему. Получим

$$\int_s \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} ds = \int_v \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dv. \quad (2.72)$$

Конечно, такое преобразование возможно только тогда, когда тензор напряжений является дифференцируемым во всем объеме материального тела. Предполагаем, что это условие выполняется.

Подставив (2.72) в уравнение (2.71), получим

$$\int_v (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})\rho) dv = 0. \quad (2.73)$$

Нам предстоит высказать некоторое суждение о подынтегральной функции в (2.73), интеграл от которой равен нулю. Конечно, подынтегральная функция может быть и не равной нулю, а интеграл от нее окажется равным нулю. Так бывает, например, с синусом или косинусом, если область интегрирования охватывает их период или несколько полных периодов. Дело упрощает то, что область интегрирования в уравнении (2.73) произвольная. Действительно, интегральное уравнение динамики должно выполняться для любого материального тела. Следовательно, объем v материального тела произволен! Так что, если подынтегральная функция является синусом или косинусом, а область интегрирования произвольна, то из условия равенства нулю интеграла, взятого по произвольному интервалу, немедленно следует равенство нулю амплитуды синуса или косинуса, а значит и равенство нулю подынтегральной функции. Применяя это качественное рассуждение к уравнению (2.73), приходим к заключению о том, что подынтегральная функция равна нулю во всех точках объема материального тела, т.е.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})\rho = 0 \quad \text{в } v^*. \quad (2.74)$$

Справедливость уравнения (2.74) можно доказать и непосредственно. Доказательство проведем методом от противного. В соответствии с этим методом допускаем, что подынтегральная функция в (2.73) отлична от нуля хотя бы в одной точке M

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})\rho \neq 0. \quad (2.75)$$

Окружим точку M сферой с малым радиусом δ . Примем дополнительное сильное предположение о том, что подынтегральная функция в (2.73) равномерно непрерывна в пределах всего тела. Но, тогда, она окажется равномерно непрерывной и в пределах выделенной сферы, а в силу малости радиуса сферы δ почти постоянной. Применим интегральное уравнение (2.73) к материальному телу, заключенному в выделенной сфере. В силу почти постоянства подынтегральной функции интегрирование выполняется элементарно, и результат оказывается таким

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})\rho) \frac{4}{3} \pi \delta^3 \neq 0. \quad (2.76)$$

Итак, интеграл в (2.76), вычисленный для материального тела, занимающего сферическую область около точки M , оказался отличным от нуля, тогда как по (2.73) он должен быть равен нулю. Получилось противоречие. В противоречие вступило с одной стороны условие (2.73), которое выражает уравнение динамики, т.е. закон природы, который не может быть нарушен никогда, а с другой стороны условие (2.76), которое не является законом природы, а является следствием всего лишь принятого нами предположения (2.75). Закон природы отвергнуть нельзя, придется отвергнуть свое предположение (2.75). Следовательно, предположение о том, что подынтегральная функция в (2.73) отлична от нуля хотя бы в одной точке M является ошибочным. Таким образом, (2.74) должно выполняться в каждой точке материального тела. Это обстоятельство оправдывает название — дифференциальное уравнение динамики материального тела.

Наконец, подставив в (2.74) представление ускорения по (1.14), получим уравнение динамики в следующей форме

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \left(\mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right) \rho = 0. \quad (2.77)$$

Запишем уравнение динамики (2.77) в координатной форме. Ограничимся только прямолинейной ортогональной декартовой системой координат. Полагаем

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl},$$

$$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial x_r},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}_l F_l,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}_l v_l = \mathbf{i}_s v_s$$

и, подставив эти представления в (2.77), получаем

$$\left(\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \cdot (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl}) + \left(\mathbf{i}_l F_l - \mathbf{i}_l \frac{\partial v_l}{\partial t} - (\mathbf{i}_s v_s) \cdot \left(\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial x_r} \mathbf{i}_l v_l \right) \right) \rho = 0.$$

Проведя скалярные умножения, преобразуем это уравнение к следующей форме

$$\delta_{rk} \mathbf{i}_l \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_r} + \left(\mathbf{i}_l F_l - \mathbf{i}_l \frac{\partial v_l}{\partial t} - \delta_{sr} v_s \mathbf{i}_l \frac{\partial v_l}{\partial x_r} \right) \rho = 0.$$

Выполняя суммирование по индексу r , приходим к следующему результату

$$\mathbf{i}_l \left(\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_k} + \left(F_l - \frac{\partial v_l}{\partial t} - v_s \frac{\partial v_l}{\partial x_s} \right) \rho \right) = 0.$$

Остается обратить в нуль координаты этого нулевого вектора, и мы получим искомое уравнение динамики в координатной форме

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_k} + \left(F_l - \frac{\partial v_l}{\partial t} - v_s \frac{\partial v_l}{\partial x_s} \right) \rho = 0. \quad (2.78)$$

Напоминаем известные правила координатного тензорного исчисления: свободный индекс l принимает последовательно значения 1, 2 и 3, а по повторяющимся индексам k и s ведется суммирование от 1 до 3. Запишем эти уравнения в развернутой форме.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \left(F_1 - \frac{\partial v_1}{\partial t} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \left(F_2 - \frac{\partial v_2}{\partial t} - v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \left(F_3 - \frac{\partial v_3}{\partial t} - v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \rho &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Сопоставление этих уравнений и (2.78) с компактной формой их записи (2.77) наглядно демонстрирует преимущества прямого тензорного исчисления не только в сравнении с (2.79), но и с координатной формой их записи (2.78). Так, для прямой записи (2.79) использовано 226 знаков, для координатной записи (2.78) — 28 знаков, а для записи с помощью прямого тензорного исчисления всего 18 знаков! Поэтому при рассуждениях общего характера удобнее всего форма (2.77) и лишь при подробных вычислениях неизбежно использование развернутой формы (2.79).

Последнее, на чем следует остановиться в связи с уравнением динамики — это массовые силы. Как задать \mathbf{F} ?

1. Сила тяжести.

Для того, чтобы найти \mathbf{F} в этом случае проще всего воспользоваться определением (2.25). На малый объем Δv действует сила

$$\Delta \mathbf{P} = \rho \Delta v \mathbf{g}, \quad (2.80)$$

где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения. Напоминаем, что

$$g = |\mathbf{g}| = 9,89 \frac{M}{c^2}.$$

Внося значение ΔP по (2.80) в (2.25), получим

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}. \quad (2.81)$$

2. Инерционные массовые силы.

Рассмотрим случай, когда материальное тело совершает сложное движение: некоторое заданное программное движение, не связанное с деформацией. Программное движение зададим следующим образом. Вводим некоторое абсолютно твердое тело и связываем с ним вращенную систему координат. Начало координат этой системы совпадает с полюсом твердого тела. Распределение скоростей во введенном абсолютно твердом теле имеет выражение

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.82)$$

где \mathbf{V}_0 — скорость полюса, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела.

Движение деформируемого тела рассматриваем во введенной вращающейся системе координат, причем полагаем, что относительное перемещение его точек, а значит и относительные скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ малы в определенном смысле.

Скорости точек деформируемого тела имеют выражение

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{отн}}.$$

Ускорение находим дифференцированием во вращающейся системе координат. Получаем

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{V}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} + \dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}}$$

или

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{V}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} + \dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}}. \quad (2.83)$$

Первое слагаемое здесь — ускорение вместе с полюсом, второе — ускорение, вызванное изменением угловой скорости, третье — центростремительное ускорение, четвертое — ускорение Кориолиса и, наконец, пятое — относительное ускорение.

Подставив найденное выражение ускорения (2.83) в уравнение динамики (2.74), получим уравнение динамики относительного движения деформируемого тела

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \left(-\dot{\mathbf{V}}_0 - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} - \dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}} \right) \rho = 0. \quad (2.84)$$

Разумеется тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и оператор Гамильтона должны быть заданы во вращающейся системе координат.

Сравнивая (2.84) с (2.74) замечаем: место массовой силы заняло выражение

$$\mathbf{F} = -\dot{\mathbf{V}}_0 - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}. \quad (2.85)$$

Его и следует принять за инерционную массовую силу.

3. Равномерное вращение деформируемого тела вокруг оси.

Рассмотрим случай, когда программное движение представляет вращение с постоянной угловой скоростью, а $\mathbf{v}_{\text{отн}} = 0$, т.е. положим

$$\dot{\mathbf{V}}_0 = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0, \quad \mathbf{v}_{\text{отн}} = 0.$$

Тогда получим

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (2.86)$$

Это так называемая центробежная массовая сила. Ее выражение преобразуем по формуле для двойного векторного произведения. Получим

$$\mathbf{F} = -(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}))$$

или

$$\mathbf{F} = \omega^2 \left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \cdot \mathbf{r} \right) \right). \quad (2.87)$$

Выражение $\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}$ представляет собой орт направления вектора угловой скорости, а произведение $\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \cdot \mathbf{r}$ — проекцию относительного вектора \mathbf{r} на орт направления угловой скорости. Умножая эту проекцию на орт, получим составляющую радиус-вектора \mathbf{r} , направленную параллельно вектору угловой скорости. Наконец, разность, стоящая в скобке, представляет собой составляющую вектора \mathbf{r} , перпендикулярную вектору угловой скорости. Можно сказать немного по-другому: это расстояние от материальной точки до оси вращения. Обозначая его \mathbf{h} , получаем для массовой силы следующее выражение

$$\mathbf{F} = \omega^2 \mathbf{h}. \quad (2.88)$$

Получилось стандартное выражение центробежной массовой силы.

4. Массовые силы в гиростате.

Пусть теперь программное движение представляет движение гиростата. Это означает, что имеется несущее тело, совершающее равномерное вращательное движение с угловой скоростью Ω_1 , и расположенные на нем материальные роторы, способные совершать собственное вращение по отношению к несущему телу с угловой скоростью Ω_2 .

Такой гиростат изображен на рис. 2.9. Несущее тело называем несущим ротором. Он показан в виде большого цилиндра, вращающегося вокруг оси ox_3 с угловой скоростью ω_1 . Вектор угловой скорости равен

$$\Omega_1 = \omega_1 \mathbf{i}_3, \quad (2.89)$$

причем ω_1 — величина угловой скорости.

Малые роторы вращаются вокруг своих осей, зафиксированных на несущем роторе. Скорость этого относительного вращения обозначаем ω_2 . Для простоты полагаем, что таких роторов два и они расположены симметрично, как это изображено на рис. 2.9.

Рассмотрим тот момент времени, когда оси малых роторов будут находиться над осью ox_2 . Тогда векторы относительных угловых скоростей левого и правого роторов будут равны

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{л}} &= \omega_2 (\mathbf{i}_3 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta), \\ \Omega_{\text{п}} &= \omega_2 (\mathbf{i}_3 \cos \theta - \mathbf{i}_2 \sin \theta). \end{aligned} \quad (2.90)$$

В другие моменты времени эти относительные угловые скорости направлены вдоль осей этих роторов.

Вычислим ускорения точек разных роторов — и несущего и несомых. При этом используем следующую формулу для вектора скорости

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}',$$

где Ω — угловая скорость тела, а \mathbf{r} — радиус его точек во вращающейся с телом системе координат, наконец, $\dot{\mathbf{r}}'$ — относительная производная вектора \mathbf{r} во вращающейся системе координат.

Ускорение найдем дифференцированием

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times \dot{\mathbf{r}} + \Omega \times \dot{\mathbf{r}}' + \ddot{\mathbf{r}}'. \quad (2.91)$$

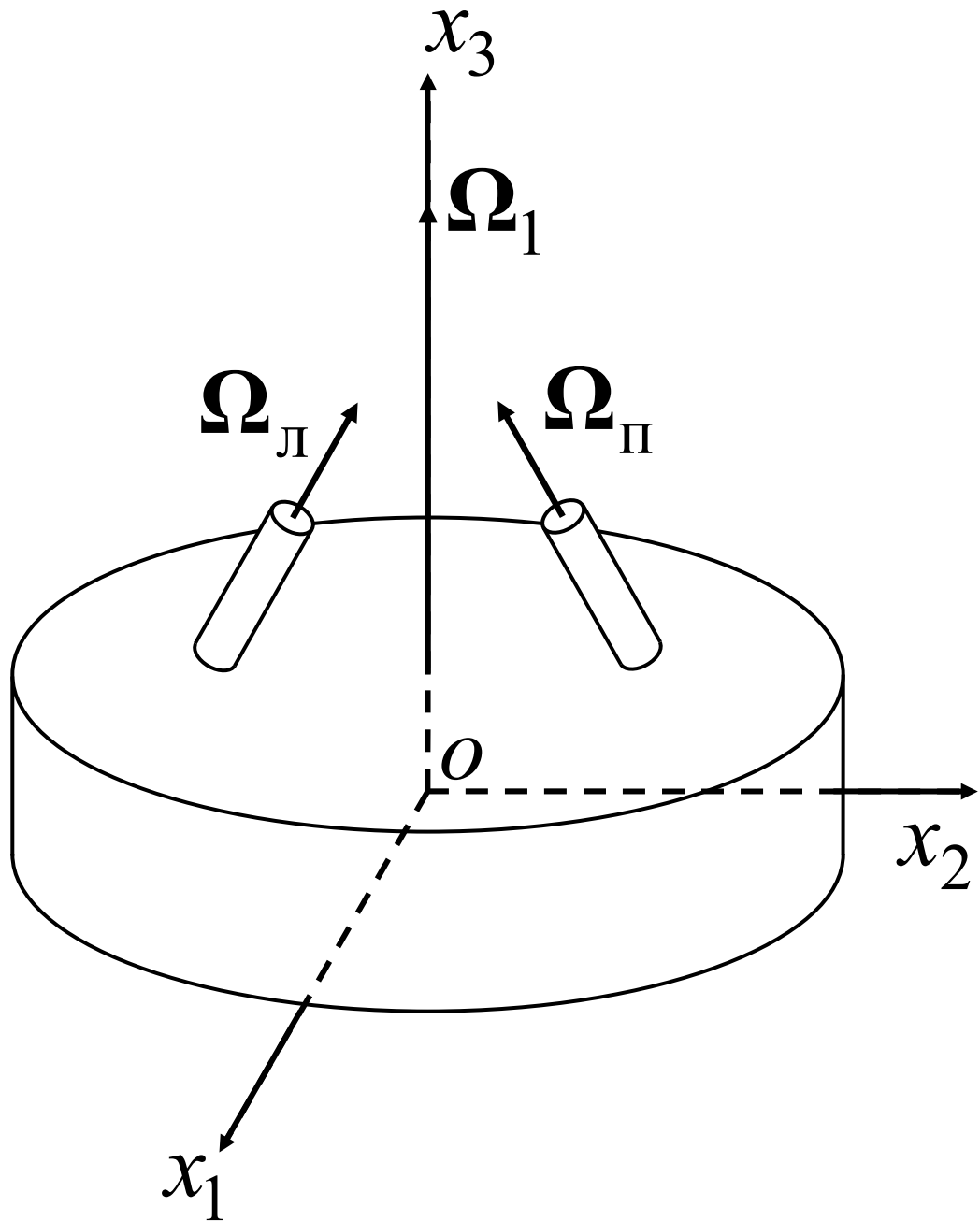


Рис. 2.9. Гиростат

Вспоминая теперь, что $\dot{\mathbf{r}}$ — это скорость, т.е.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}',$$

получаем

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \ddot{\mathbf{r}}'.$$

Это известная формула теоретической механики: третье слагаемое — ускорение Кориолиса.

Применим ее для вычисления ускорения в точках несущего ротора. В этом случае $\dot{\mathbf{r}}' = 0$, $\ddot{\mathbf{r}}' = 0$, и тогда получаем

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}),$$

где $\boldsymbol{\Omega}_1$ — угловая скорость несущего ротора (2.89). В стационарном режиме она постоянна, и тогда все упрощается, так что находим

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}).$$

Для массовой силы получаем выражение

$$\mathbf{F} = -\mathbf{a} = -\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \boldsymbol{\Omega}_1^2 - \boldsymbol{\Omega}_1 (\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathbf{r}). \quad (2.92)$$

Оно совпадает с (2.86) и (2.87).

Обратимся теперь к выражению ускорения точек одного малого ротора. Для относительной скорости $\dot{\mathbf{r}}'$ имеем выражение

$$\dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Pi) = \boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*,$$

где $\boldsymbol{\Omega}_2$ — угловая скорость вращения малого ротора относительно несущего, а $\mathbf{r}_* = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\Pi$ — вектор, который соединяет типичную точку ротора с точкой \mathbf{r}_Π , в которой расположен подшипник, зафиксированный на несущем роторе.

Относительное ускорение находим дифференцированием.

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \mathbf{r}_* + \boldsymbol{\Omega}_2 \times \dot{\mathbf{r}}'_* = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \mathbf{r}_* + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*).$$

Подставив найденные значения относительной скорости и относительного ускорения в (2.91), получим следующее выражение для ускорения в точках малого ротора

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*) + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 \times \mathbf{r}_* + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*).$$

Как видно из формул (2.89) и (2.90) векторы угловых ускорений обращаются в нуль при постоянных ω_1 и ω_2 , и тогда получаем

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*) + \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*).$$

В результате находим следующее представление для массовой силы, действующей в точках малого ротора

$$\mathbf{F} = -\mathbf{a} = -(\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega}_1 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*) - \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{r}_*)). \quad (2.93)$$

Преобразуя все входящие сюда двойные векторные произведения, получим окончательно

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \mathbf{r} \Omega_1^2 - \boldsymbol{\Omega}_1 (\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathbf{r}) + 2\mathbf{r}_* (\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2) - \\ & - 2\boldsymbol{\Omega}_2 (\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \mathbf{r}_*) + \mathbf{r}_* \Omega_2^2 - \boldsymbol{\Omega}_2 (\boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \mathbf{r}_*). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Входящие сюда векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}_* следует рассматривать как эйлеровы координаты.

Напоминаю, что мы рассматриваем события, происходящие в гиростате, в системе координат $ox_1x_2x_3$, вращающейся вокруг оси ox_3 вместе с несущим ротором. Тогда все вошедшие в (2.94) векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}_* не будут зависеть от времени, как всякие эйлеровы координаты. Какое же конкретное значение они будут иметь? Это зависит от того, как будут ориентированы оси малых роторов по отношению к несущему. Эта ориентация постоянна во времени, но пока не фиксирована, а значит произвольна.

Пользуясь этим произволом, выберем такую ориентацию, при которой ось правого малого ротора находится над осью ox_2 , а левого над ее продолжением в область отрицательных значений x_2 . Пусть, кроме того, $\theta = 45^\circ$. Тогда для точек левого ротора используем $\boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_л$ из (2.90), а для правого — $\boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_п$. Переходя попутно к декартовым координатам, получим для левого ротора следующие значения проекций \mathbf{F} на оси ox_1 , ox_2 и ox_3 .

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 \omega_1^2 + x_{1*} (\sqrt{2} \omega_1 + \omega_2) \omega_2, \\ F_2 &= x_2 \omega_1^2 - \frac{1}{2} (2\sqrt{2} \omega_1 + \omega_2) \omega_2 (x_{3*} - x_{2*}), \\ F_3 &= \frac{1}{2} \omega_2^2 (x_{3*} - x_{2*}). \end{aligned}$$

Аналогичные выражения находим для правого малого ротора

$$\begin{aligned}F_1 &= x_1 \omega_1^2 + x_{1*} (\sqrt{2} \omega_1 + \omega_2), \\F_2 &= x_2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} (2\sqrt{2} \omega_1 + \omega_2) \omega_2 (x_{3*} + x_{2*}), \\F_3 &= \frac{1}{2} \omega_2^2 (x_{3*} + x_{2*}).\end{aligned}$$

Для несущего ротора находим следующие значения проекций массовой силы

$$\begin{aligned}F_1 &= x_1 \omega_1^2, \\F_2 &= x_2 \omega_1^2, \\F_3 &= 0.\end{aligned}$$

Следует иметь в виду, что этими массовыми силами не исчерпываются воздействия на роторы. Они еще взаимодействуют через подшипники вращающихся роторов. Детальный характер этого взаимодействия зависит от устройства подшипников. На этом вопросе не останавливаемся.

2.10. Тензор напряжений в главном базисе

Главные направления тензора напряжений, как всякого симметричного тензора, определяются уравнением (1.115) из [9]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (2.95)$$

В левой части поменяем порядок следования тензора и вектора. Получим

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{e}.$$

Но в левой части мы узнаем представление вектора напряжения $\boldsymbol{\tau}$, действующего в деформируемом теле на площадке с нормалью \mathbf{e} , т.е.

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \mathbf{e}. \quad (2.96)$$

А это означает, что вектор напряжения на главной площадке параллелен самой нормали. Так что, на главных площадках действуют только нормальные напряжения; касательные напряжения на этих площадках равны нулю. Как у всякого симметричного тензора, у тензора напряжений таких площадок три. Нормали к ним обозначаем $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$; соответствующие им главные значения называем главными

напряжениями и обозначаем их $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Известно, что главные направления ортогональны, более того ортонормированны, т.е.

$$\mathbf{e}_{(k)} \cdot \mathbf{e}_{(l)} = \delta_{kl}.$$

Если принять главные направления в качестве базиса, то тензор напряжений примет удивительно простой вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{e}_{(1)} \mathbf{e}_{(1)} + \sigma_2 \mathbf{e}_{(2)} \mathbf{e}_{(2)} + \sigma_3 \mathbf{e}_{(3)} \mathbf{e}_{(3)} = \sum_{k=1}^3 \sigma_k \mathbf{e}_{(k)} \mathbf{e}_{(k)}. \quad (2.97)$$

В главном базисе тензор напряжений оказывается диагональным, причем диагональные координаты тензора равны главным напряжениям.

Рассмотрим так называемую октаэдрическую площадку. Это площадка, равно наклоненная к главным направлениям. Очевидно, что таких площадок восемь: по одной в каждом октанте координатной системы, построенной на элементах главного базиса тензора напряжений. Рассмотрим только одну из этих площадок, с нормалью, расположенной в первом октанте. Проекция вектора нормали к ней равны друг другу, так что нормаль имеет представление

$$\mathbf{n}_{\text{окт}} = \alpha (\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}).$$

Значение коэффициента α найдем из условия нормировки

$$\mathbf{n}_{\text{окт}} \cdot \mathbf{n}_{\text{окт}} = 1.$$

Это условие дает уравнение

$$\alpha^2 (1+1+1) = 1.$$

Отсюда находим α и затем

$$\mathbf{n}_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}). \quad (2.98)$$

Вектор напряжения на октаэдрической площадке определим по формуле Коши

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{окт}} = \mathbf{n}_{\text{окт}} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.99)$$

Нормальное напряжение на этой площадке обозначим $\sigma_{\text{окт}}$. Его найдем проектированием вектора (2.99) на нормаль. Получим

$$\sigma_{\text{окт}} = \mathbf{n}_{\text{окт}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\text{окт}}.$$

Подставив сюда $\boldsymbol{\sigma}$ по (2.97) и $\mathbf{n}_{\text{окт}}$ по (2.98), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{окт}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \sigma_k \mathbf{e}_{(k)} \mathbf{e}_{(k)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}) = \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).\end{aligned}$$

Получилось среднее нормальное напряжение σ , т.е.

$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma! \quad (2.100)$$

Известно, что это первый инвариант тензора напряжений, поделенный на три. В произвольном базисе имеем для $\sigma_{\text{окт}}$ следующее представление

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sigma_{kk}. \quad (2.101)$$

Заключение таково: октаэдрическая площадка замечательна тем, что на ней нормальное напряжение равно среднему нормальному напряжению σ .

Рассмотрим теперь квадрат модуля вектора $\boldsymbol{\tau}_{\text{окт}}$ по (2.99)

$$|\boldsymbol{\tau}_{\text{окт}}|^2 = \boldsymbol{\tau}_{\text{окт}} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{окт}} = \mathbf{n}_{\text{окт}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\text{окт}}. \quad (2.102)$$

Здесь появился квадрат тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Воспользовавшись представлением $\boldsymbol{\sigma}$ в главном базисе (2.97), легко найдем

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_1^2 \mathbf{e}_{(1)} \mathbf{e}_{(1)} + \sigma_2^2 \mathbf{e}_{(2)} \mathbf{e}_{(2)} + \sigma_3^2 \mathbf{e}_{(3)} \mathbf{e}_{(3)}.$$

Подставив это представление в (2.102), получим

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\tau}_{\text{окт}}|^2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \sigma_k^2 \mathbf{e}_{(k)} \mathbf{e}_{(k)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}) = \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2).\end{aligned}$$

Конечно, это тоже инвариант: это поделенный на три первый инвариант тензора $\boldsymbol{\sigma}^2$. В произвольном базисе он имеет представление

$$|\boldsymbol{\tau}_{\text{окт}}|^2 = \frac{1}{3} \sigma_{kl} \sigma_{kl}. \quad (2.103)$$

С точностью до коэффициента — это квадрат нормы тензора напряжений. Так, например, если в качестве нормы принять следующее выражение

$$N(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{kl} \sigma_{kl}}, \quad (2.104)$$

то получим

$$|\boldsymbol{\tau}_{\text{окт}}|^2 = \frac{2}{3} N^2(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.105)$$

Найдем еще одну характерную величину на октаэдрической площадке. Речь идет о квадрате модуля касательного напряжения на октаэдрической площадке. По теореме Пифагора для этой величины находим

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}|^2 = |\boldsymbol{\tau}_{\text{окт}}|^2 - |\boldsymbol{\sigma}_{\text{окт}}|^2.$$

Подставив сюда уже вычисленные величины, получим

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}|^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \sigma^2.$$

Преобразуем это выражение. Сначала представим его так

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}|^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 6\sigma^2 + 3\sigma^2). \quad (2.106)$$

Слагаемое $6\sigma^2$ перепишем, используя явное выражение σ по (2.101)

$$6\sigma^2 = 6\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma = 2(\sigma_1\sigma + \sigma_2\sigma + \sigma_3\sigma).$$

Наконец, подставив это выражение в (2.106), получим

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}|^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma - 2\sigma_2\sigma - 2\sigma_3\sigma + 3\sigma^2).$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_{\text{окт}}|^2 = \frac{1}{3} & (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma + \sigma^2 + \\ & + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma + \sigma^2 + \\ & + \sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma + \sigma^2). \end{aligned}$$

Здесь явно выделены квадраты разностей. Учитывая это, найдем

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}|^2 = \frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2). \quad (2.107)$$

Остается понять, что же получилось. Чтобы сделать это, воспользуемся представлением тензора напряжений в главном базисе (2.97) и вычислим девиатор тензора напряжений \mathbf{s}

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{E}\sigma = (\sigma_1 - \sigma)\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + (\sigma_2 - \sigma)\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + (\sigma_3 - \sigma)\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \quad (2.108)$$

Квадрат нормы девиатора введем по аналогии с (2.104)

$$N(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{1}{2} s_{kl} s_{kl}}.$$

Конечно, это еще один инвариант тензора напряжений. В главном базисе эта норма имеет написание

$$N(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}.$$

Главные значения девиатора s_k находим по разложению (2.108) и получаем

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma, \quad s_2 = \sigma_2 - \sigma, \quad s_3 = \sigma_3 - \sigma.$$

Таким образом, норма девиатора имеет выражение

$$N(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\right)}.$$

Но ведь это с точностью до множителя совпадает буквально с выражением (2.107)! Так что, получаем

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}|^2 = \frac{2}{3} N^2(\mathbf{s}).$$

Норму девиатора иногда называют интенсивностью касательных напряжений и обозначают τ . Таким образом, имеем

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}| = \sqrt{\frac{2}{3}} N(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \tau. \quad (2.109)$$

Итак, модуль касательного напряжения на октаэдрической площадке с точностью до множителя $\sqrt{\frac{2}{3}}$ совпадает с нормой девиатора и с интенсивностью касательных напряжений.

Наконец, напомним известную формулу для второго инварианта тензора (1.144) из [9]

$$I_{2\mathbf{T}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - I_{1\mathbf{T}}^2).$$

Применим эту формулу к девиатору тензора напряжений \mathbf{s}

$$I_{2\mathbf{s}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} - I_{1\mathbf{s}}^2).$$

Но ведь первый инвариант девиатора всегда равен нулю

$$I_{1\mathbf{s}} = 0.$$

В результате получаем

$$-I_{2\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = N_{\mathbf{s}}^2.$$

Таким образом, получена еще одна интерпретация модуля касательного напряжения на октаэдрической площадке

$$|\mathbf{t}_{\text{окт}}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{-I_{2\mathbf{s}}}. \quad (2.110)$$

Он выражается через второй главный инвариант девиатора тензора напряжений.

2.11. Примеры определения главного базиса тензора напряжений и главных напряжений

Рассматриваем различные напряженные состояния

1. *Напряженное состояние чистого среза.*

Пусть тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)\sigma_{12}. \quad (2.111)$$

Это состояние чистого среза в плоскости x_1ox_2 .

Главные напряжения находятся из характеристического уравнения

$$|\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{E}| = 0,$$

которое в развернутом виде имеет выражение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, приходим к уравнению

$$-\lambda(\lambda^2 - \sigma_{12}^2) = 0.$$

Решение этого уравнения дает главные напряжения

$$\lambda_1 = \sigma_1 = \sigma_{12}, \quad \lambda_2 = \sigma_2 = 0, \quad \lambda_3 = \sigma_3 = -\sigma_{12}.$$

Для определения главных направлений имеем уравнение (1.116) из [9]

$$(\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Для первого главного направления $\mathbf{e}_{(1)}$ имеем уравнение

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_{12}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{(1)} = 0.$$

Перейдем в этом уравнении к координатной форме

$$\begin{bmatrix} -\sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{(1)1} \\ e_{(1)2} \\ e_{(1)3} \end{bmatrix} = 0,$$

где $e_{(1)1}$, $e_{(1)2}$, $e_{(1)3}$ — проекции вектора $\mathbf{e}_{(1)}$. Перемножая, получим

$$\begin{cases} -\sigma_{12}e_{(1)1} + \sigma_{12}e_{(1)2} = 0, \\ \sigma_{12}e_{(1)1} - \sigma_{12}e_{(1)2} = 0, \\ -\sigma_{12}e_{(1)3} = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$e_{(1)3} = 0.$$

Из первых двух находим

$$e_{(1)2} = e_{(1)1}.$$

Наконец, из условия нормировки

$$|\mathbf{e}_{(1)}| = 1$$

находим

$$e_{(1)2} = e_{(1)1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом

$$\mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2). \quad (2.112)$$

Для второго главного направления имеем уравнение

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = 0,$$

которое в координатной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ -\sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{(2)1} \\ e_{(2)2} \\ e_{(2)3} \end{bmatrix} = 0.$$

Перемножая, получаем

$$\begin{cases} \sigma_{12}e_{(2)2} = 0, \\ -\sigma_{12}e_{(2)1} = 0, \\ 0e_{(2)3} = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$e_{(2)1} = e_{(2)2} = 0, \quad e_{(2)3} = 1.$$

Значит

$$\mathbf{e}_{(2)} = \mathbf{i}_3. \quad (2.113)$$

Для третьего главного направления получаем следующее уравнение

$$(\boldsymbol{\sigma} + \sigma_{12}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{(3)} = 0.$$

В координатной форме оно имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{(3)1} \\ e_{(3)2} \\ e_{(3)3} \end{bmatrix} = 0.$$

Перемножая, получим

$$\begin{cases} \sigma_{12}e_{(3)1} + \sigma_{12}e_{(3)2} = 0, \\ \sigma_{12}e_{(3)1} + \sigma_{12}e_{(3)2} = 0, \\ \sigma_{12}e_{(3)3} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$e_{(3)1} = -e_{(3)2}, \quad e_{(3)3} = 0.$$

С учетом нормировки, наконец, получаем

$$\mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2). \quad (2.114)$$

Итак, первое и третье главные направления лежат в плоскости x_1ox_2 и направлены по диагоналям, соответственно, первого и второго квадрантов. Третье главное направление совпадает с осью ox_3 . Расположение этих осей показано на рис. 2.10.

2. Напряженное состояние с равными касательными напряжениями.

Полагаем, что тензор напряжений имеет представление

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)\tau_0 + (\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2)\tau_0 + (\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3)\tau_0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|\boldsymbol{\sigma} - \lambda\mathbf{E}| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & -\lambda & \tau_0 \\ \tau_0 & \tau_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, получим

$$-\lambda^3 + 4\tau_0^2\lambda - \tau_0^2\lambda + 2\tau_0^3 = 0.$$

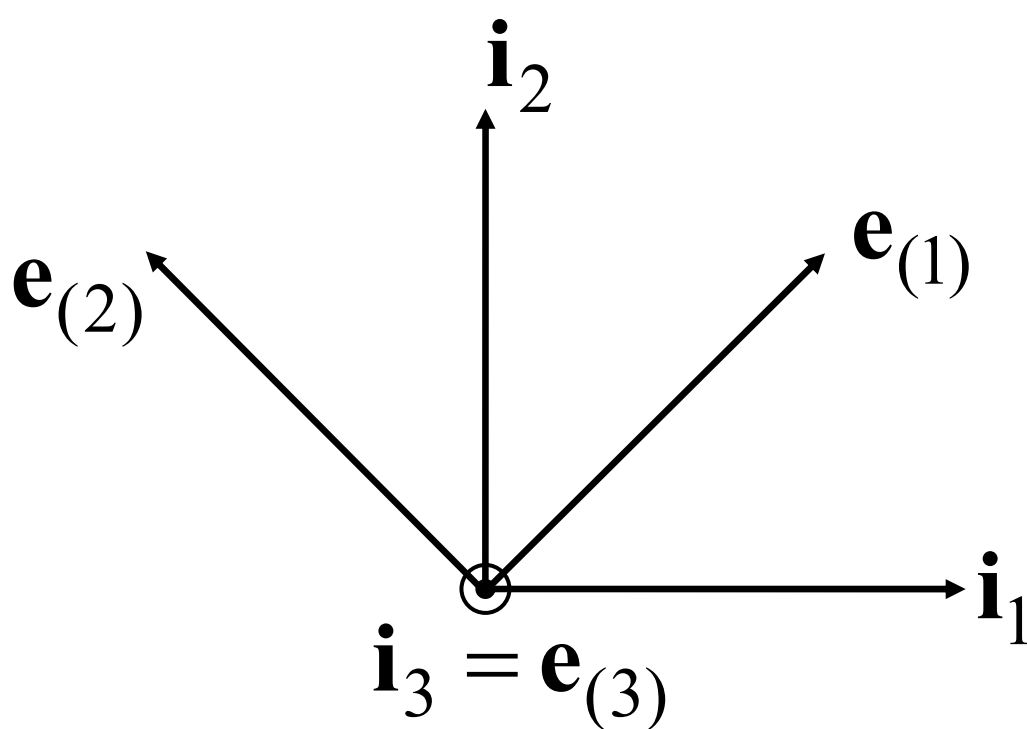


Рис. 2.10. Главные направления тензора напряжений чистого сдвига

Первые два слагаемые, а также третье и четвертое слагаемые допускают разложение на множители

$$-\lambda(\lambda - 2\tau_0)(\lambda + 2\tau_0) - \tau_0^2(\lambda - 2\tau_0) = 0.$$

Легко выделить множитель $(\lambda - 2\tau_0)$, и тогда получим

$$-(\lambda - 2\tau_0)(\lambda(\lambda + 2\tau_0) + \tau_0^2) = 0$$

или

$$-(\lambda - 2\tau_0)(\lambda + \tau_0)^2 = 0.$$

Легко увидеть, что корни этого уравнения таковы

$$\lambda_{1,2} = -\tau_0, \quad \lambda_3 = 2\tau_0.$$

Значит главные напряжения таковы

$$\sigma_1 = 2\tau_0, \quad \sigma_2 = -\tau_0, \quad \sigma_3 = -\tau_0.$$

Итак, наибольшее главное напряжение положительно (если τ_0 положительно), а два других равны и отрицательны.

Для определения первого главного направления имеем уравнение

$$(\boldsymbol{\sigma} - 2\tau_0\mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{(1)} = 0.$$

В матричной форме это уравнение имеет вид

$$\begin{bmatrix} -2\tau_0 & \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & -2\tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & \tau_0 & -2\tau_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{(1)1} \\ e_{(1)2} \\ e_{(1)3} \end{bmatrix} = 0.$$

Перемножая матрицы, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2\tau_0 e_{(1)1} + \tau_0 e_{(1)2} + \tau_0 e_{(1)3} = 0, \\ \tau_0 e_{(1)1} - 2\tau_0 e_{(1)2} + \tau_0 e_{(1)3} = 0, \\ \tau_0 e_{(1)1} + \tau_0 e_{(1)2} - 2\tau_0 e_{(1)3} = 0. \end{cases}$$

Ее можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} -3\tau_0 e_{(1)1} + \tau_0 e_{(1)1} + \tau_0 e_{(1)2} + \tau_0 e_{(1)3} = 0, \\ -3\tau_0 e_{(1)2} + \tau_0 e_{(1)1} + \tau_0 e_{(1)2} + \tau_0 e_{(1)3} = 0, \\ -3\tau_0 e_{(1)3} + \tau_0 e_{(1)1} + \tau_0 e_{(1)2} + \tau_0 e_{(1)3} = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим

$$e_{(1)1} = e_{(1)2} = e_{(1)3} = \frac{1}{3}(e_{(1)1} + e_{(1)2} + e_{(1)3}).$$

Самое важное здесь то, что все проекции $\mathbf{e}_{(1)}$ равны, и тогда из условия нормировки находим

$$e_{(1)1} = e_{(1)2} = e_{(1)3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, первое главное направление имеет представление

$$\mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3). \quad (2.115)$$

Для определения $\mathbf{e}_{(2)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$ имеем всего одно векторное уравнение

$$(\boldsymbol{\sigma} + \tau_0 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Оно эквивалентно следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \tau_0 e_1 + \tau_0 e_2 + \tau_0 e_3 = 0, \\ \tau_0 e_1 + \tau_0 e_2 + \tau_0 e_3 = 0, \\ \tau_0 e_1 + \tau_0 e_2 + \tau_0 e_3 = 0. \end{cases}$$

Оказалось, что все уравнения одинаковы и сводятся к следующему

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (2.116)$$

Что же это за вектор? Как он направлен? Чтобы понять это, запишем представление этого главного вектора

$$\mathbf{e} = e_1 \mathbf{i}_1 + e_2 \mathbf{i}_2 + e_3 \mathbf{i}_3$$

и составим скалярное произведение

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_{(1)}.$$

Оно равно

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3).$$

Но в соответствии с (2.116) это скалярное произведение равно нулю!

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = 0.$$

Значит второе и третье главные направления ортогональны первому главному направлению! Но ведь это все известно из общей теории, примененной к кратному корню характеристического уравнения! Ничего нового! Как же быть? Нужно опять обратиться к общей теории. Из всех векторов, ортогональных вектору $\mathbf{e}_{(1)}$ следует произвольно выбрать $\mathbf{e}_{(2)}$ и

$\mathbf{e}_{(3)}$, но так, чтобы они оказались ортогональны друг другу. Сделаем это, например, так. Пусть проекции вектора $\mathbf{e}_{(2)}$ на оси ox_1 и ox_2 равны, т.е.

$$e_{(2)2} = e_{(2)1}. \quad (2.117)$$

Тогда из (2.116) найдем

$$e_{(2)3} = -2e_{(2)1}. \quad (2.118)$$

Условие нормировки дает

$$|\mathbf{e}_{(2)}|^2 = (e_{(2)1})^2 + (e_{(2)2})^2 + (e_{(2)3})^2 = 1.$$

С учетом сказанного только что о соотношении проекций (2.117), (2.118) находим

$$(e_{(2)1})^2 + (e_{(2)1})^2 + 4(e_{(2)1})^2 = 1,$$

т.е.

$$e_{(2)1} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Таким образом, оказалось

$$\mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3). \quad (2.119)$$

Остается найти третье главное направление. Его найдем из условия ортогональности первым двум направлениям. Для этого зададим вектор третьего направления в виде разложения

$$\mathbf{e}_{(3)} = e_{(3)1}\mathbf{i}_1 + e_{(3)2}\mathbf{i}_2 + e_{(3)3}\mathbf{i}_3$$

и составим условия ортогональности первым двум направлениям

$$\mathbf{e}_{(3)} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_{(3)1} + e_{(3)2} + e_{(3)3}) = 0,$$

$$\mathbf{e}_{(3)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_{(3)1} + e_{(3)2} - 2e_{(3)3}) = 0.$$

Комбинируя эти два уравнения, легко найдем

$$e_{(3)3} = e_{(3)1} + e_{(3)2} = 0.$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{e}_{(3)} = e_{(3)1}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2).$$

Проекцию $e_{(3)1}$ найдем из условия нормировки $|\mathbf{e}_{(3)}|$ на единицу.

Результат вычислений таков

$$\mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2). \quad (2.120)$$

К этому же результату можно придти еще более коротким путем. Пользуясь свободой в выборе векторов $\mathbf{e}_{(2)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$, допустим, что вектор $\mathbf{e}_{(3)}$, например, лежит в плоскости x_1ox_2 , т.е. его проекция на ось ox_3 равна нулю

$$e_{(3)3} = 0. \quad (2.121)$$

Тогда из уравнения (2.116) находим

$$e_{(3)2} = -e_{(3)1},$$

и тогда вектор $\mathbf{e}_{(3)}$ будет равен

$$\mathbf{e}_{(3)} = e_{(3)1}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2). \quad (2.122)$$

Проекцию $e_{(3)1}$ найдем из условия нормировки вектора $\mathbf{e}_{(3)}$ на единицу

$$\mathbf{e}_{(3)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = (e_{(3)1})^2 (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2) \cdot (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2) = 2(e_{(3)1})^2.$$

Отсюда находим

$$e_{(3)1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{e}_{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2). \quad (2.123)$$

Оказалось, что на роль вектора главного направления $\mathbf{e}_{(3)}$ подходят векторы (2.123), направленные противоположно друг другу. Пользуясь свободой в выборе направления, выбираем

$$\mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2). \quad (2.124)$$

Второе главное направление $\mathbf{e}_{(2)}$ находим по формуле

$$\mathbf{e}_{(2)} = -\frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3|}, \quad (2.125)$$

ибо векторное произведение направлено перпендикулярно векторам сомножителям, т.е. $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$.

Векторы $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ образуют тройку базисных векторов правой системы координат. Это определил знак в (2.125).

Подставляя сюда $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$ по (2.115) и (2.124), находим

$$\mathbf{e}_{(2)} = -\frac{(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \times (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)}{|(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \times (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)|} = -\frac{2\mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2}{|2\mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - 2\mathbf{i}_3). \quad (2.126)$$

Мы получили те же самые векторы главных направлений.

Характер напряженного состояния легко выяснить, если записать выражение тензора напряжений в главном базисе

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\tau_0 \mathbf{e}_{(1)} \mathbf{e}_{(1)} - \tau_0 \mathbf{e}_{(2)} \mathbf{e}_{(2)} - \tau_0 \mathbf{e}_{(3)} \mathbf{e}_{(3)}. \quad (2.127)$$

Оно представляет комбинацию одноосного растяжения интенсивностью $2\tau_0$ вдоль оси $\mathbf{e}_{(1)}$ и сжатия интенсивностью τ_0 в перпендикулярной плоскости.

3. Тензор равных нормальных напряжений.

Пусть тензор напряжений имеет следующее выражение

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_0 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \sigma_0 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \sigma_0 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \quad (2.128)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{E}| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} (\sigma_0 - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_0 - \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_0 - \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

или, наконец,

$$(\sigma_0 - \lambda)^3 = 0.$$

Корень всего один, но он трехкратный!

Для определения любого из главных направлений имеем одно уравнение

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e} = 0$$

или

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Оно выполняется при произвольных векторах главных направлений. В соответствии с общей теорией можем выбрать любые три ортогональных вектора. Например, вполне допустимо принять

$$\mathbf{e}_{(1)} = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \mathbf{i}_3.$$

Этот результат можно было предвидеть, учитывая представление тензора напряжений (2.128). Ведь оно само по себе является разложением тензора напряжений в главном базисе!

3. ТЕРМОДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

3.1. Предварительные замечания

До настоящего момента времени мы приспособивали к описанию деформируемых тел понятия и законы классической механики. Мы приспособили понятие материальной точки и использовали законы механики систем взаимодействующих материальных точек. Однако, во всех наших рассуждениях до сих пор вовсе не учитывалось тепловое движение и связанные с ним понятия тепла и температуры. Из физики известно, что нагрев газообразных, жидких и твердых тел вызывает их расширение или сжатие, а значит, и движение. Такое движение следует учитывать наравне с чисто механическим движением, поскольку это такое же движение, как и механическое. Именно с этим обстоятельством связано появление этой главы в книге по механике деформируемых тел. Материал этой главы и стиль изложения заимствованы из работ К. Трусделла [11], [12], [13].

3.2. Классификация тепловых воздействий и взаимодействий

Полагаем, что тепло может поступать непосредственно в объем материального тела и через его поверхность. Количество тепла, поступающее в единицу объема в единицу времени обозначаем b . Это значит, что в объем v извне поступает следующее количество тепла

$$q_v = \int_v b dv. \quad (3.1)$$

Далее, полагаем, что в материальное тело через единицу площади поверхности в единицу времени поступает некоторое количество тепла, которое обозначим $-g$. Это значит, что через всю поверхность материального тела поступает следующее количество тепла

$$q_s = \int_s (-g) ds. \quad (3.2)$$

Откуда здесь взялся знак минус? Это дань капризам теории теплопроводности. В теории теплопроводности предпочитают оперировать теплом, уходящим из материального тела через его поверхность, а не теплом, входящим в него. Так что g — это уходящее тепло, а $(-g)$ — входящее.

Теперь следует обсудить вопрос о том, как происходит передача тепла от одной части тела к другой. Полагаем, что такая передача происходит только через поверхность, отделяющую одно тело от другого. Как и выше при рассмотрении внешнего притока тепла к материальному телу используем уже введенное обозначение $(-g)$. Так что, через поверхность некоторого куска материального тела проходит количество тепла, определяемое формулой (3.2).

Рассмотрим теперь ситуацию, изображенную на рис. 3.1. На ней показана точка M и показано также два материальных тела v_1 и v_2 с поверхностями s_1 и s_2 . Самое важное здесь, что эти две поверхности пересекаются в точке M . Получается так, что из тела v_1 в точке M в единицу времени через единицу площади поверхности s_1 уходит количество тепла, равное g_1 . Вместе с тем, из тела v_2 в той же самой точке M в единицу времени через единицу площади поверхности s_2 уходит количество тепла, равное g_2 . Конечно, в общем случае g_2 отличается от g_1 . Но ведь через точку M могут проходить другие поверхности и значит появятся соответствующие потоки тепла g . Чем больше поверхностей тел проходит через точку M , тем больше потоков тепла в точке M . Все эти поверхности в точке M отличаются всего лишь одним — местной внешней нормалью. А это означает, что поток тепла в точке M зависит от этой нормали. Таким образом, мы устанавливаем существование зависимости

$$g = g(\mathbf{n}). \quad (3.3)$$

С математической точки зрения это зависимость скаляра от вектора, причем, единственного.

Как записать более или менее общее представление зависимости (3.3)? Будем рассуждать так же, как и в главе 2. Зададим этот вопрос иначе. Из каких составляющих можно сконструировать скаляр, зная, что он зависит от единичного вектора \mathbf{n} ?

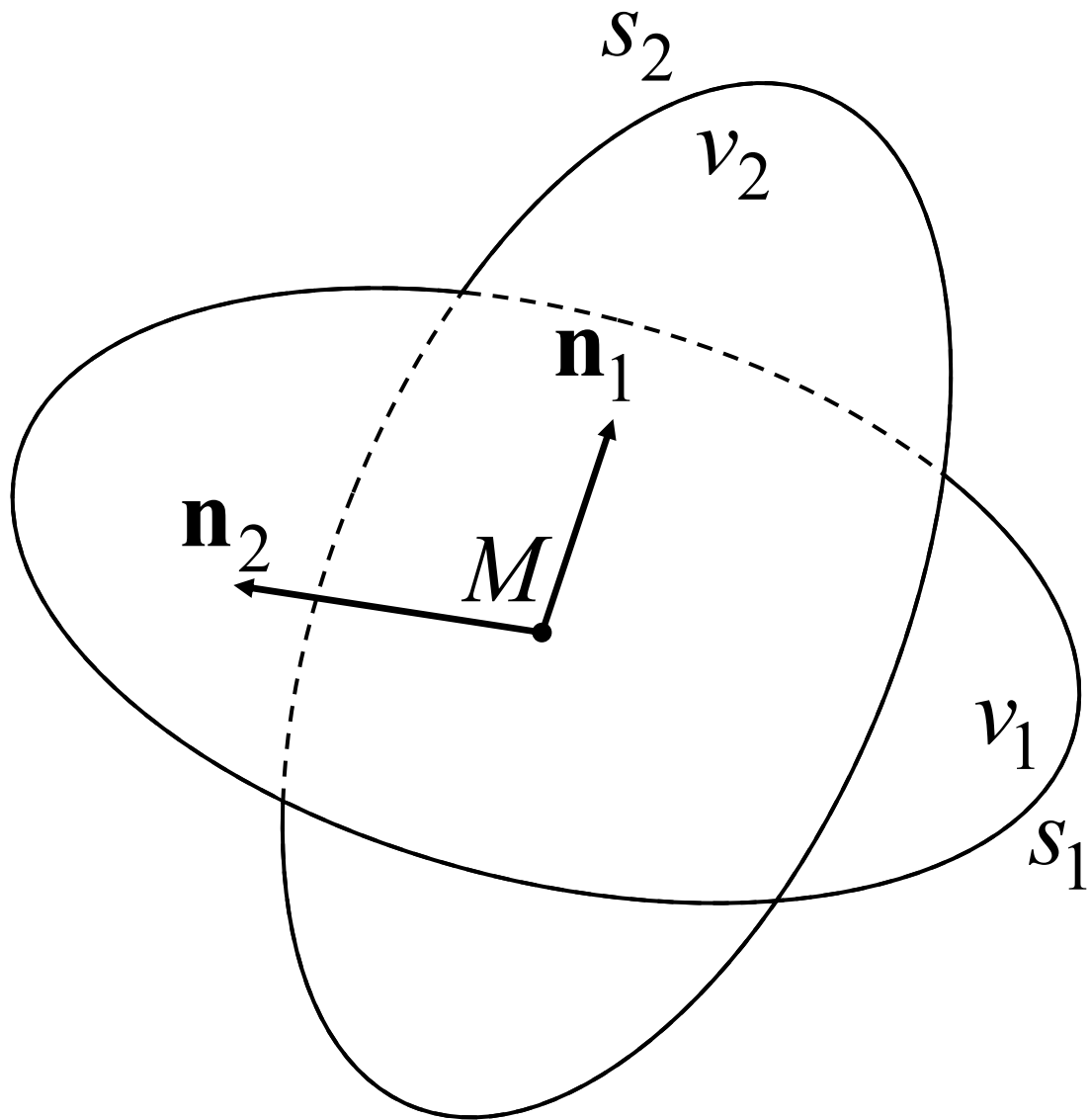


Рис. 3.1. Материальная точка M расположена на пересечении ограничивающих поверхностей двух тел

Несомненно в число таких составляющих следует включить некую константу β , вовсе не зависящую от \mathbf{n} . Далее, в число таких составляющих можно включить скалярное произведение единичного вектора \mathbf{n} на какой-нибудь вектор, не зависящий от \mathbf{n} . Обозначим его \mathbf{h} . Вот и все! Мы пришли к следующему представлению теплового потока

$$g = \beta + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}. \quad (3.4)$$

Остается вспомнить, что все это происходит в точке M с эйлеровой координатой \mathbf{r} в момент времени t . Таким образом, β и \mathbf{h} зависят от \mathbf{r} и t , т. е.

$$\beta = \beta(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{r}, t). \quad (3.5)$$

Замечание 3.1. Если бы вектор \mathbf{n} не был бы единичным, то пришлось бы использовать более общую зависимость. Так, уже формулу (3.3) пришлось бы записывать иначе, а именно, так

$$g = g\left(|\mathbf{n}|, \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right).$$

Тогда вместо (3.3) мы получили бы представление

$$g = \beta(|\mathbf{n}|) + \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot \mathbf{h}(|\mathbf{n}|),$$

или

$$g = \beta(|\mathbf{n}|) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(|\mathbf{n}|),$$

где обозначено

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{h}(|\mathbf{n}|)}{|\mathbf{n}|}.$$

Полученное представление отличается от (3.4) тем, что в случае, когда $|\mathbf{n}|$ отличен от единичного, скаляр β и вектор \mathbf{H} зависят от модуля \mathbf{n} . Нам это обобщение не понадобится.

3.3. Первый закон термодинамики — закон сохранения энергии

Грамотнее было бы назвать этот закон не законом сохранения энергии, а законом изменения энергии. Именно в такой форме мы формулируем этот закон: скорость изменения полной энергии

материального тела равна сумме мощностей внешних сил, приложенных к этому телу и скорости подвода тепла к этому телу. Под полной энергией понимаем сумму кинетической энергии T и так называемой внутренней энергии u . Так что, закон изменения энергии следует записать так

$$\dot{T} + \dot{u} = p + q, \quad (3.6)$$

где p — упомянутая выше мощность внешних сил, приложенных к этому телу, а q — скорость подвода тепла к телу.

Запишем явное выражение входящих в (3.6) величин. Малый объем dv имеет массу ρdv и скорость \mathbf{v} . Так что его кинетическая энергия dT равна

$$dT = \rho dv \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}.$$

Интегрируя по объему всего тела, находим кинетическую энергию материального тела

$$T = \int_v \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \rho dv.$$

Производную по времени вычислим с помощью формул (2.19) и (2.20).

Получаем

$$\dot{T} = \int_v \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{2} \rho dv.$$

или

$$\dot{T} = \int_v \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \rho dv. \quad (3.7)$$

Далее, полагаем, что малый объем dv имеет внутреннюю энергию $U \rho dv$. Принимаем предположение о том, что внутренняя энергия деформируемого тела представляет аддитивную функцию объема, т. е.

$$u = \int_v U \rho dv.$$

Дифференцирование с помощью формул (2.19), (2.20) дает

$$\dot{u} = \int_v \dot{U} \rho dv. \quad (3.8)$$

Обратимся к мощности внешних сил, приложенных к телу. Из рис. 2.3б видно, что в объеме действует массовая сила интенсивностью \mathbf{F} , а на поверхности приложено напряжение $\boldsymbol{\tau}$. Следовательно, мощность внешних сил имеет выражение

$$p = \int_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rho dv + \int_s \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} dv.$$

Вектор напряжения представляем по формуле Коши (2.45), и тогда последнее выражение принимает вид

$$p = \int_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rho dv + \int_s \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dv. \quad (3.9)$$

Усматриваем, что поверхностный интеграл может быть преобразован в объемный по формуле Остроградского-Гаусса. Выполняя это преобразование, получим

$$p = \int_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rho dv + \int_v \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dv. \quad (3.10)$$

Вычислим стоящую под знаком второго интеграла дивергенцию

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \overset{\rightarrow}{\nabla} \cdot \left(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v} \right) + \overset{\uparrow}{\nabla} \cdot \left(\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \right).$$

Воспользовавшись правилами тензорной алгебры, преобразуем выражения, стоящие в правой части так, чтобы оператор Гамильтона оказался рядом с тем объектом, на который он действует. Это дает результат

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \left(\overset{\rightarrow}{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\boldsymbol{\sigma}} \right) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \overset{\leftarrow}{\nabla} \right).$$

Вот только теперь отпала необходимость использовать стрелки, которые связывают оператор Гамильтона с объектами, на которые он действует: они оказались в скобках, а операции в скобках выполняются в первую очередь!

Так что имеем

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{v} \nabla). \quad (3.11)$$

Теперь следует воспользоваться формулой (1.97) и учесть (1.85) и (1.87). Получим

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}.$$

Транспонируя, найдем

$$\mathbf{v} \nabla = \mathbf{D} - \mathbf{\Omega}.$$

Напомним, что \mathbf{D} — тензор скоростей деформаций; он симметричен. Тензор вихря $\mathbf{\Omega}$ антисимметричен. Подставив последнее выражение в (3.11), получим

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{\Omega}.$$

Обращаем внимание читателя на то, что последнее слагаемое равно нулю, поскольку это есть двойное скалярное произведение симметричного тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на антисимметричный тензор вихря $\mathbf{\Omega}$. В результате находим

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}. \quad (3.12)$$

Подставив (3.12) в (3.10), получим

$$p = \int_v ((\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) dv. \quad (3.13)$$

Остается записать скорость подвода тепла q к материальному телу. В соответствии со сказанным в разделе 3.2 она равна сумме скорости подвода тепла непосредственно в объем (3.1) и скорости подвода тепла через поверхность (3.2), т. е.

$$q = \int_v b dv + \int_s (-g) ds. \quad (3.14)$$

Преобразуем это выражение, внося в него представление теплового потока g по (3.4). Получим

$$q = \int_v b dv - \int_s \beta ds - \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} ds. \quad (3.15)$$

Последний интеграл преобразуем по формуле Остроградского-Гаусса. Результат этого преобразования таков

$$q = \int_v (b - \nabla \cdot \mathbf{h}) dv - \int_s \beta ds. \quad (3.16)$$

Подставим (3.7), (3.8), (3.11), и (3.16) в (3.6). Получим следующее представление интегрального уравнения первого закона термодинамики

$$\int_v (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dot{U}) \rho dv = \int_v (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rho + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}) dv - \int_s \beta ds.$$

Преобразуем это уравнение, перенося правую часть в левую и, наконец, объединяя оба объемных интеграла в один. Тогда приходим к следующему уравнению

$$\int_s \beta ds + \int_v \left(-(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) \cdot \mathbf{v} + \rho \dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} - b + \nabla \cdot \mathbf{h} \right) dv = 0.$$

Первый член в скобках под знаком объемного интеграла обращается в нуль в силу обязательного выполнения уравнения динамики (2.46). Учитывая это обстоятельство, получаем следующее интегральное представление первого закона термодинамики

$$\int_s \beta ds + \int_v (\rho \dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} - b + \nabla \cdot \mathbf{h}) dv = 0. \quad (3.17)$$

Следует иметь в виду, что (3.17) это не безусловный результат: он получен с использованием двух предположений:

1. Тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ непрерывен и дифференцируем по пространственным координатам во всем объеме тела v .
2. Вектор \mathbf{h} тоже непрерывен и дифференцируем по пространственным координатам.

Роль этих предположений в том, что они позволили в процессе преобразований использовать формулы Остроградского-Гаусса преобразования поверхностных интегралов в объемные. А что произойдет, если эти предположения не выполняются? В этом случае следует вместо (3.10) и (3.16) использовать (3.9) и (3.15).

В этом более общем случае, будем иметь следующее представление интегрального уравнения первого закона термодинамики

$$\int_v (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dot{U}) \rho dv = \int_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rho dv + \int_s \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} ds + \int_v b dv - \int_s \beta ds - \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} ds.$$

Перенос всех слагаемых правой части в левую и объединение интегралов приводит к следующему результату

$$\int_s (\beta - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) ds + \int_v (\rho \dot{U} - \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} - b) dv = 0. \quad (3.18)$$

3.4. Условия выполнения интегрального уравнения первого закона термодинамики при непрерывном тепловом потоке

Полагаем, что β является равномерно непрерывной функцией пространственных координат, а вектор \mathbf{h} не только непрерывным, но и непрерывно дифференцируемым.

В этом случае следует воспользоваться представлением первого закона термодинамики в форме (3.17). Применим это уравнение к куску материального тела в форме шара с радиусом δ и с центром в некоторой точке M . В силу принятых предположений о непрерывности подынтегральные функции почти постоянны в пределах своих малых областей интегрирования. Выполнив элементарное интегрирование в (3.17), получим

$$4\pi\delta^2\beta + \frac{4\pi}{3}\delta^3(\rho\dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - b + \nabla \cdot \mathbf{h}) = 0.$$

Деление на площадь поверхности шара дает результат

$$\beta + \frac{\delta}{3}(\rho\dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - b + \nabla \cdot \mathbf{h}) = 0. \quad (3.19)$$

Выбираем радиус шара малым, т.е. принимаем $\delta \rightarrow 0$. Тогда из (3.19) получаем, что

$$\beta = 0 \quad (3.20)$$

в центре M шара малого радиуса. Но ведь мы можем выбрать шар так, что его центр окажется в любой точке материального тела v^* . Таким образом, условие (3.20) имеет место в любой точке области v^* если в ней β непрерывен, а вектор \mathbf{h} непрерывно дифференцируем. Можно ли распространить условие (3.20) на поверхность тела s^* ? Конечно, да! Оценить это можно по аналогии с тем, как это было сделано в разделе 2.6.

Опять выбираем центр малого полушара так, чтобы он оказался на поверхности s^* . Применяя первый закон термодинамики (3.17) к полушару, полностью расположенному в v^* , получим выполнив элементарное интегрирование

$$\left(2\pi\delta^2 + \pi\delta^2\right)\beta + \frac{2\pi}{3}\delta^3(\rho\dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - b + \nabla \cdot \mathbf{h}) = 0.$$

Поделив обе части этого равенства на площадь поверхности полушара $3\pi\delta^2$, получим

$$\beta + \frac{2}{9}\delta(\rho\dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - b + \nabla \cdot \mathbf{h}) = 0.$$

Принимая $\delta \rightarrow 0$, и в этом случае обнаружим

$$\beta = 0.$$

Таким образом, (3.20) выполняется во всей области $v^* + s^*$. Но тогда во всей этой области в силу (3.4) имеет место более простое представление для теплового потока, а именно

$$g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}. \quad (3.21)$$

Снова обращаемся к (3.19) и учитываем (3.20). Получаем условие

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}, \quad (3.22)$$

которое должно выполняться во всем v^* , но не на s^* .

Итак мы убедились, что условия (3.20) или (3.21) и (3.22) необходимы для выполнения интегрального уравнения первого закона термодинамики (3.17). Легко видеть, что они и достаточны. Это видно непосредственно из (3.17). Условие (3.21) это аналог формулы Коши. Появившийся в нем вектор \mathbf{h} называется вектором теплового потока. Уравнение (3.22) называется дифференциальным уравнением первого закона термодинамики.

3.5. Условия выполнения интегрального уравнения первого закона термодинамики при кусочно-непрерывном тепловом потоке

Пусть тепловой поток g является кусочно-непрерывным. Чтобы сделать более конкретные заявления, воспользуемся общим представлением теплового потока (3.4)

$$g = \beta + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}.$$

Итак, мы полагаем, что скаляр β является кусочно-непрерывным, а вектор теплового потока \mathbf{h} является не просто кусочно-непрерывным, а даже кусочно-непрерывно дифференцируемым. Будем также считать, что

тензор напряжений также является кусочно-непрерывно дифференцируемым, а значит и кусочно-непрерывным.

Для простоты рассуждений будем предполагать, что имеется всего лишь одна поверхность разрыва непрерывности всех перечисленных величин. Как и в разделе 5 обозначаем эту поверхность Σ . Ситуация изображена на рис. 3.2. Этот рисунок подобен рис. 2.5 Поверхностью разрыва Σ область пространства v^* , занятая деформируемым телом в текущий момент времени, разделяется на две области v_+^* и v_-^* . Точно так же разделяется и поверхность s^* — на s_+^* и s_-^* , как это и показано на рис. 3.2. Рассмотрим часть деформируемого тела, расположенную выше поверхности разрыва Σ . В ней непрерывны β, \mathbf{h} и g , и тогда по результатам прошлого раздела находим

$$\begin{aligned} \beta_+ &= 0, & \text{в } v_+^* + s_+^* + \Sigma \\ g_+ &= \mathbf{n}_+ \cdot \mathbf{h}_+, & \text{в } v_+^* + s_+^* + \Sigma \\ \rho \dot{U}_+ &= \boldsymbol{\sigma}_+ \cdot \mathbf{D}_+ + b - \nabla \cdot \mathbf{h}_+. & \text{в } v_+^* \end{aligned} \quad (3.23)$$

В части тела, расположенной ниже Σ , по аналогии находим

$$\begin{aligned} \beta_- &= 0, & \text{в } v_-^* + s_-^* + \Sigma \\ g_- &= \mathbf{n}_- \cdot \mathbf{h}_-, & \text{в } v_-^* + s_-^* + \Sigma \\ \rho \dot{U}_- &= \boldsymbol{\sigma}_- \cdot \mathbf{D}_- + b - \nabla \cdot \mathbf{h}_-. & \text{в } v_-^* \end{aligned} \quad (3.24)$$

Мы видим, из рассмотрения (3.23) и (3.24), что скаляр β не имеет разрыва, более того, равен нулю во всем деформируемом теле

$$\beta = 0 \quad \text{в } v^* + s^*.$$

Далее, тепловой поток g имеет единое представление (3.21)

$$g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h},$$

где \mathbf{h} — вектор теплового потока имеет различные значения в областях над поверхностью разрыва и под ней: \mathbf{h}_+ и \mathbf{h}_- .

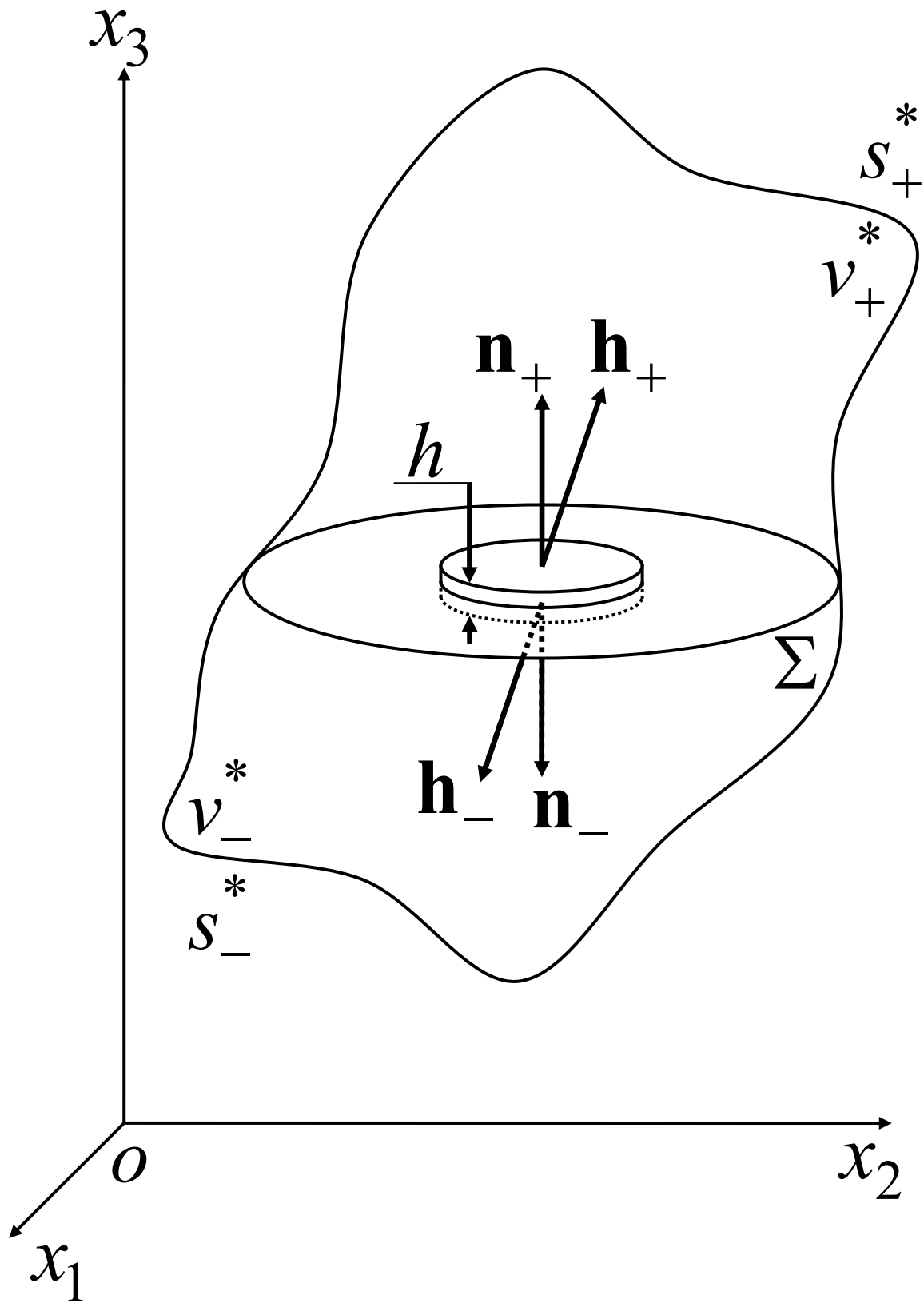


Рис. 3.2. Материальное тело с разрывом вектора теплового потока на поверхности Σ

Выделим из деформируемого тела малое цилиндрическое материальное тело с радиусом δ и высотой h . Центр его расположим в точке M , лежащий на поверхности разрыва Σ . Такой цилиндр изображен на рис. 3.2. Полагаем, что верхний торец цилиндра полностью расположен в области v_+^* , а нижний в v_-^* . На этом же рисунке показаны внешние нормали к торцевым поверхностям, которые имеют представления

$$\mathbf{n}_+ = \mathbf{n}_\Sigma, \quad \mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_\Sigma, \quad (3.25)$$

где \mathbf{n}_Σ — нормаль к поверхности Σ в точке M .

Тепловые потоки таковы

$$g_+ = \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{h}_+, \quad g_- = -\mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{h}_-.$$

Составим интегральное уравнение первого закона термодинамики для этого цилиндрического материального тела. Очевидно, что следует использовать представление этого закона в форме (3.18), причем значения напряжений на поверхностях цилиндра следует взять по (2.52) и (2.53).

Как и в разделе 2 интеграл по поверхности разобьем на три интеграла: по верхнему торцу s_{T+} , по нижнему торцу s_{T-} и, наконец, по боковой поверхности s_δ .

$$\begin{aligned} \int_s (-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) ds &= \int_{s_{T+}} (-\mathbf{n}_+ \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ \cdot \mathbf{v}_+ + \mathbf{n}_+ \cdot \mathbf{h}_+) ds + \\ &+ \int_{s_{T-}} (-\mathbf{n}_- \cdot \boldsymbol{\sigma}_- \cdot \mathbf{v}_- + \mathbf{n}_- \cdot \mathbf{h}_-) ds + \int_{s_\delta} (-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) ds. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Интегралы по торцам допускают простое приближенное вычисление

$$\begin{aligned} \int_{s_{T+}} (-\mathbf{n}_+ \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ \cdot \mathbf{v}_+ + \mathbf{n}_+ \cdot \mathbf{h}_+) ds &\approx \pi \delta^2 (-\mathbf{n}_+ \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ \cdot \mathbf{v}_+ + \mathbf{n}_+ \cdot \mathbf{h}_+). \\ \int_{s_{T-}} (-\mathbf{n}_- \cdot \boldsymbol{\sigma}_- \cdot \mathbf{v}_- + \mathbf{n}_- \cdot \mathbf{h}_-) ds &\approx \pi \delta^2 (-\mathbf{n}_- \cdot \boldsymbol{\sigma}_- \cdot \mathbf{v}_- + \mathbf{n}_- \cdot \mathbf{h}_-). \end{aligned}$$

Такой простой результат интегрирования связан с непрерывностью а значит и почти постоянством подынтегральных выражений в каждой из областей интегрирования s_{T+} и s_{T-} .

Внесем эти результаты в (3.26) и после этого в (3.18). Тогда получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} \pi\delta^2(-\mathbf{n}_+ \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ \cdot \mathbf{v}_+ + \mathbf{n}_+ \cdot \mathbf{h}_+ - \mathbf{n}_- \cdot \boldsymbol{\sigma}_- \cdot \mathbf{v}_- + \mathbf{n}_- \cdot \mathbf{h}_-) + \int_{s_{\delta}} (-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) ds + \\ + \int_v (\rho\dot{U} - \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} - b) dv = 0. \end{aligned}$$

Перенесем все интегральные выражения в правую часть этого уравнения и учтем (3.25) и, наконец, учтем факт непрерывности поля скоростей \mathbf{v} в пределах цилиндра.

$$\mathbf{v}_+ = \mathbf{v}_- = \mathbf{v}. \quad (3.27)$$

Тогда после объединения некоторых слагаемых уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \pi\delta^2(-\mathbf{n}_{\Sigma} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n}_{\Sigma} \cdot (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-)) \\ = - \int_{s_{\delta}} (-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) ds - \int_v (\rho\dot{U} - \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} - b) dv. \end{aligned}$$

Это уравнение существенно упростится, если учесть условие (2.61) для напряжений на поверхности разрыва Σ . Тогда оно примет следующий совсем простой вид

$$\begin{aligned} \pi\delta^2 \mathbf{n}_{\Sigma} \cdot (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-) = \\ = - \int_{s_{\delta}} (-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) ds - \int_v (\rho\dot{U} - \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} - b) dv. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Разделив обе части этого равенства на $\pi\delta^2$, найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\Sigma} \cdot (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-) = \\ = \frac{-1}{\pi\delta^2} \left(\int_{s_{\delta}} (-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) ds + \int_v (\rho\dot{U} - \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} - b) dv \right). \end{aligned}$$

Оценка по величине обеих частей этого равенства приводит к следующему неравенству

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}_{\Sigma} \cdot (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-)| \leq \\ \leq \frac{1}{\pi\delta^2} \left(\int_{s_{\delta}} |-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}| ds + \int_v |\rho\dot{U} - \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} - b| dv \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Покажем, что правая часть здесь может быть сделана сколь угодно малой. Допустим, что в пределах всего тела $v^* + s^*$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} |-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}| &\leq M, \\ |\rho \dot{U} - \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} - b| &\leq N, \end{aligned}$$

где M и N постоянные величины.

Учитывая эти неравенства, можем еще более усилить неравенство (3.29). Это усиление дает следующий результат

$$|\mathbf{n}_\Sigma \cdot (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-)| < (2M + \delta N) \frac{h}{\delta}.$$

Выбирая сколь угодно малым отношение h/δ , можем сделать сколь угодно малой и всю правую часть этого неравенства. Так что имеем следующее условие на поверхности разрыва вектора напряжений

$$\mathbf{n}_\Sigma \cdot (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-) = 0. \quad (3.30)$$

Подведем итог: главный результат этого раздела состоит в установлении условий (3.30) на поверхности разрыва непрерывности вектора теплового потока.

Замечание 3.2. Легко включить в рассмотрение такой гипотетический случай, когда к поверхности Σ подается тепловой поток g_Σ . Условие (3.30) в этом случае принимает вид

$$\mathbf{n}_\Sigma \cdot (\mathbf{h}_+ - \mathbf{h}_-) + g_\Sigma = 0, \quad (3.31)$$

или в более общем виде

$$g_+ + g_- + g_\Sigma = 0. \quad (3.32)$$

3.6. Физический смысл координат вектора теплового потока

Как и всякий вектор, вектор теплового потока \mathbf{h} может быть разложен по элементам векторного базиса

$$\mathbf{h} = \mathbf{i}_k h_k. \quad (3.33)$$

Вычислим тепловой поток на поверхности с нормалью

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_s.$$

По формуле (3.21) находим

$$g_s = \mathbf{i}_s \cdot (\mathbf{i}_k h_k) = h_s.$$

Эта формула демонстрирует физический смысл координат вектора теплового потока: координата h_s вектора теплового потока равна

тепловому потоку, проходящему через площадку с нормалью, направленной вдоль оси ox_s .

На рис. 3.3 изображен типичный прямоугольный параллелепипед. На его гранях с векторами внешних нормалей, направленными вдоль положительных направлений координатных осей, показаны тепловые потоки, уносящие тепло из параллелепипеда в материальную среду, его окружающую.

На рис. 3.4 изображен тот же самый параллелепипед. Но теперь показаны тепловые потоки, уносящие тепло из этого параллелепипеда через грани с внешними нормальями, направленными вдоль отрицательных направлений координатных осей. Последние вычисляются по той же самой формуле (3.21), однако теперь внешняя нормаль имеет выражение

$$\mathbf{n} = -\mathbf{i}_s,$$

так что получается

$$g_{-s} = -h_s.$$

Итак, тепловые потоки, уносящие тепло через грани параллелепипеда, с внешними нормальями, направленными вдоль отрицательных направлений осей ox_s , оказались равными $-h_s$.

Рассмотрим теперь условие (3.30) на поверхности разрыва вектора теплового потока и выясним, какие ограничения накладывает оно на координаты вектора теплового потока. Для этого зададим вектор теплового потока в точке на поверхности разрыва следующим разложением

$$\mathbf{h} = \mathbf{n}_\Sigma h_n + \mathbf{l}_\Sigma h_l + \mathbf{m}_\Sigma h_m,$$

где \mathbf{n}_Σ , как и ранее, вектор нормали к поверхности разрыва Σ , а \mathbf{l}_Σ и \mathbf{m}_Σ ортонормированные векторы, касательные к поверхности Σ .

Тогда условие (3.30) запишется так

$$h_{n+} = h_{n-}. \quad (3.34)$$

Оказалось, что нормальная к поверхности разрыва Σ составляющая вектора теплового потока должна быть непрерывной, а касательные могут иметь разрыв.

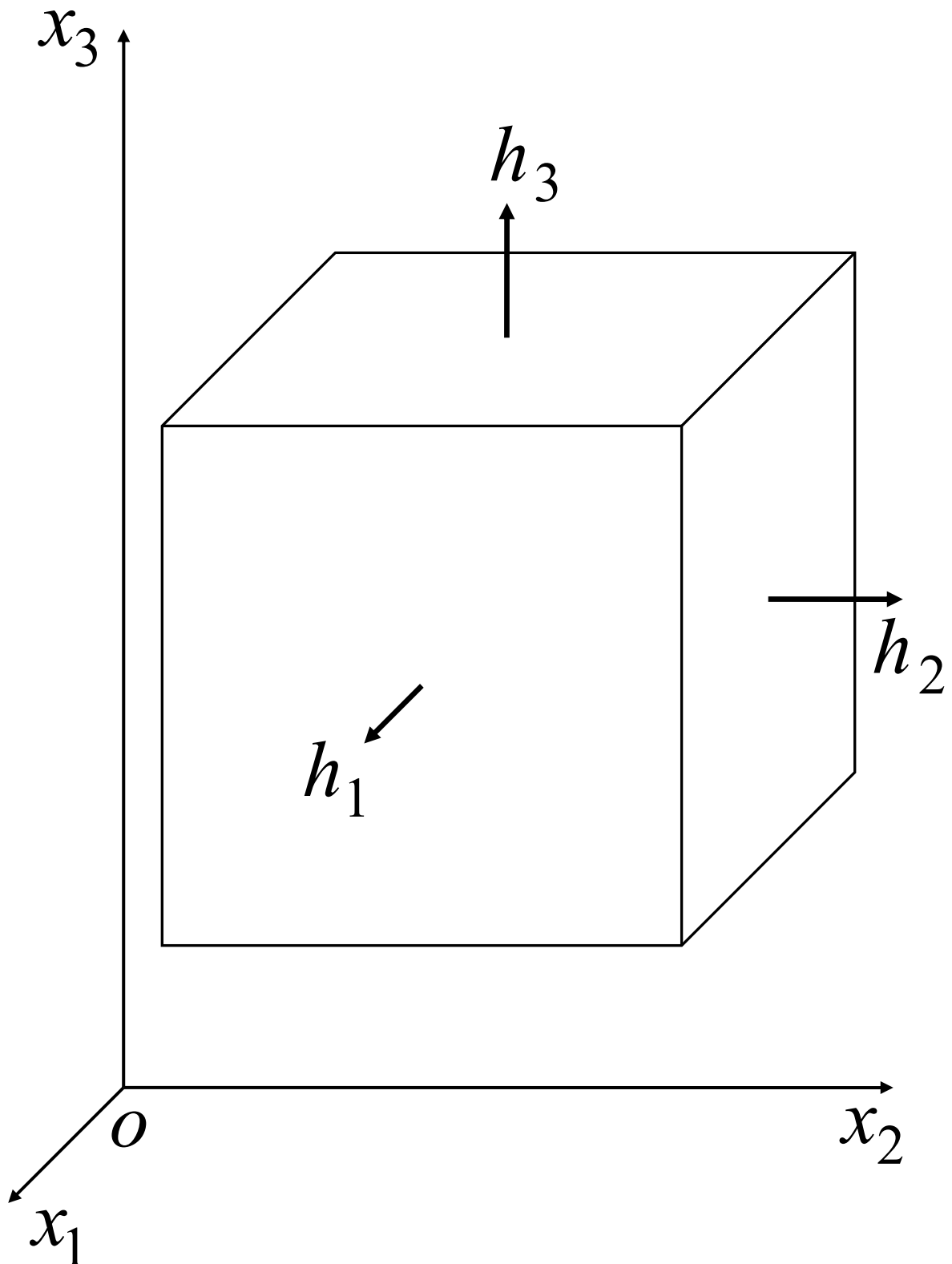


Рис. 3.3. Тепловые потоки на гранях параллелепипеда с нормальными, направленными вдоль координатных осей

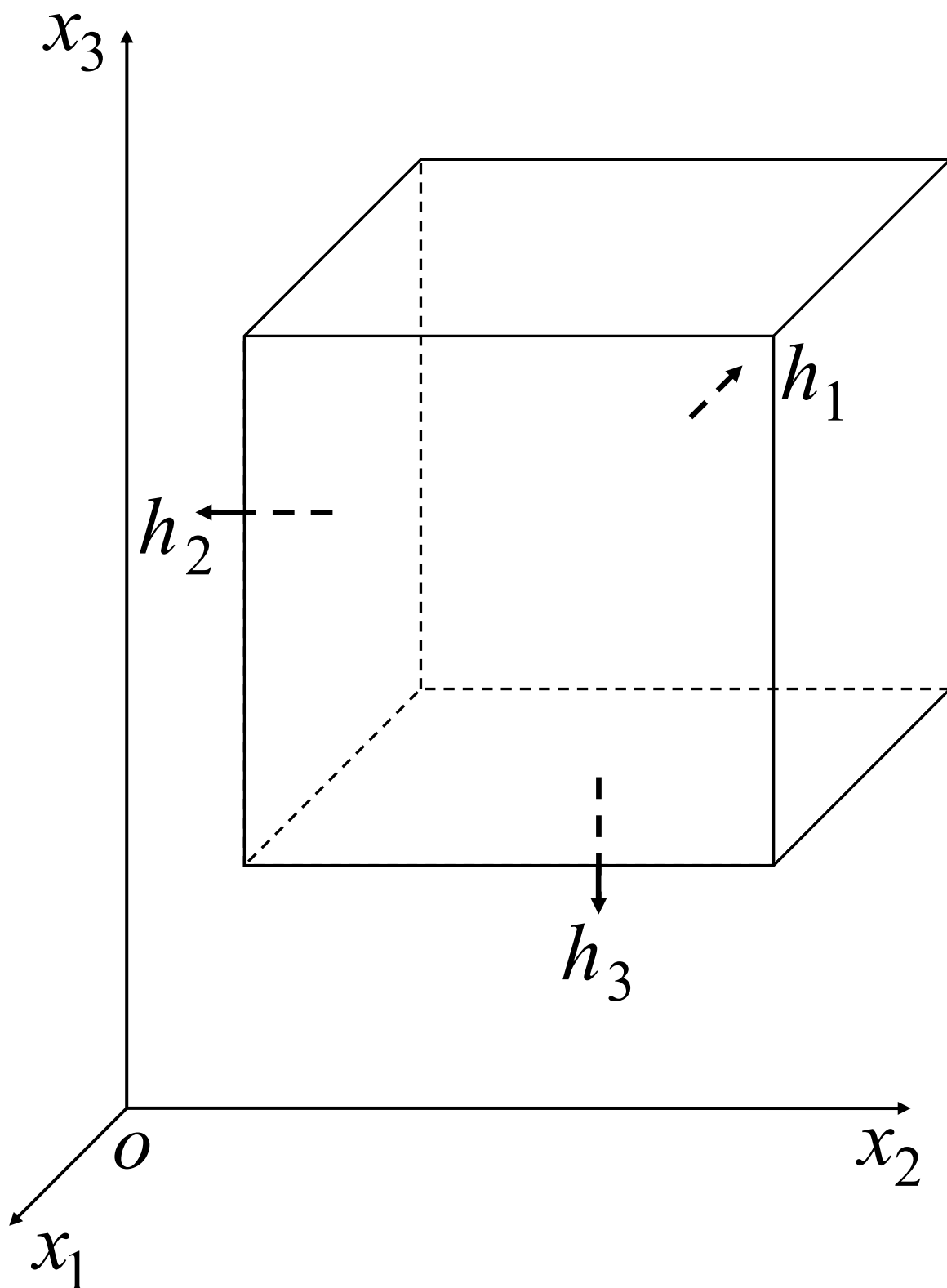


Рис. 3.4. Тепловые потоки на гранях параллелепипеда с нормальными, направленными вдоль отрицательных направлений осей координат

Используем теперь произвольный базис, например, базис основной координатной системы \mathbf{i}_s . Тогда из (3.21) и (3.33) находим

$$h_s = \mathbf{i}_s \cdot \mathbf{h}.$$

Отсюда видно, что, если на поверхности Σ вектор теплового потока имеет разрыв, то разрыв имеют все координаты вектора теплового потока, если только нормаль к этой поверхности не параллельна ни одной из координатных осей.

3.7. Дифференциальное уравнение первого закона термодинамики

Обратимся к уравнению (3.22). Оно названо дифференциальным уравнением первого закона термодинамики. Уяснить для себя причину такого названия можно, если внимательно проделать снова рассуждения раздела 3.4. Более ясно понять причину этого названия можно, если рассмотреть несколько иную процедуру его получения.

Обратимся к общей формулировке первого закона термодинамики (3.6). Воспользуемся представлением его слагаемых (3.7), (3.8), (3.13) и, наконец, (3.14). Получим следующее уравнение

$$\int_v (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dot{U}) \rho dv = \int_v (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rho + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} + b) dv + \int_S (-g) ds. \quad (3.35)$$

Воспользуемся полученным в разделе 3.4 представлением теплового потока g по (3.21)

$$g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}$$

и преобразуем поверхностный интеграл в объемный по формуле Остроградского-Гаусса

$$\int_S (-g) ds = - \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} ds = - \int_v \nabla \cdot \mathbf{h} dv.$$

Тогда уравнение (3.35) примет вид

$$\int_v (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dot{U}) \rho dv = \int_v (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rho + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}) dv.$$

Перенесем объемный интеграл левой части этого равенства в правую часть и объединим объемные интегралы в один. Получим следующее уравнение

$$\int_v \left((\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}})) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho \dot{U} \right) dv = 0.$$

Это уравнение существенно упрощается, если учесть, что первое уравнение динамики (2.46) обязательно выполняется. Результат этого упрощения таков

$$\int_v \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho \dot{U} \right) dv = 0. \quad (3.36)$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что первый закон термодинамики обязан выполняться для любого материального тела. Это означает, что объем v в (3.36) произволен, конечно, в пределах v^* . В этом случае подинтегральная функция должна быть равной нулю.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho \dot{U} = 0. \quad (3.37)$$

Докажем справедливость этого уравнения. Сделаем это методом от противного. А именно, предположим, что подинтегральное выражение отлично от нуля хотя бы в одной точке M и равно R

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho \dot{U} = R, \quad (R \neq 0). \quad (3.38)$$

Примем сильное предположение о том, что подинтегральная функция в (3.36) непрерывна во всем пространстве v , а значит и в точке M . Окружим точку M малой сферой радиуса δ и применим уравнение (3.36) к материальному телу, заключенному внутри сферы. В силу непрерывности, а значит и почти постоянства подинтегральной функции, интегрирование осуществляется элементарно и оно дает следующий результат

$$\frac{4\pi}{3} \delta^3 R = 0. \quad (3.39)$$

Получилось противоречие: мы предположили в (3.38), что $R \neq 0$, а закон природы в соответствии с (3.39) требует, чтобы R равнялось нулю. Кто-то неправ! Закон природы — первый закон термодинамики неправым быть не может никогда; неправыми оказываемся мы, когда предположили в (3.38) что $R \neq 0$. Следовательно это предположение следует отвергнуть. Остается согласиться с тем, что $R = 0$, а значит уравнение (3.37) должно

выполняться во всех точках материального тела. Это обстоятельство оправдывает название — дифференциальное уравнение первого закона термодинамики материального тела.

Уравнение (3.37) легко преобразуется к форме (3.22).

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}.$$

Попытаемся выяснить физический смысл этого уравнения. Выше уже говорилось о том, что первый закон термодинамики это закон сохранения энергии. Так что, уравнение (3.22) можно называть также дифференциальным уравнением закона сохранения энергии.

Но посмотрим на это уравнение немного с другой точки зрения.

Допустим, что механическое движение отсутствует, т. е.

$$\mathbf{v} = 0.$$

В этом случае тензор скоростей деформации \mathbf{D} равен нулю

$$\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v})^S = 0,$$

и значит уравнение (3.22) принимает вид

$$\rho \dot{U} = b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (3.40)$$

Что описывает это уравнение? Механическое движение отсутствует; осталось только тепловое движение! Следовательно (3.40) это уравнение теплопроводности. Как же тогда квалифицировать уравнение (3.22)? Очевидно, что это тоже уравнение теплопроводности, правда, осложненное слагаемым $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}$ механического происхождения и зависимостью U от этого движения.

Запишем, в заключение, уравнение теплопроводности (3.22) в координатной форме. В прямолинейной ортогональной декартовой системе координат оно имеет вид

$$\rho \dot{U} = \sigma_{kl} D_{kl} + b - \frac{\partial h_k}{\partial x_k}. \quad (3.41)$$

3.8. Второй закон термодинамики

В литературе встречается около трех десятков различных формулировок второго закона термодинамики. Они отличаются различным уровнем общности, а также применением его к различным частным

случаям. Наиболее общей и полной формулировкой этого закона является неравенство Клаузиуса – Дюгема. Его используем и мы.

Формулировка такова: скорость изменения внутренней энтропии материального тела не меньше, чем скорость подвода энтропии извне к этому телу.

Запишем это утверждение аналитически. Обозначаем внутреннюю энтропию материального тела s . Скорость ее изменения, естественно, равна \dot{s} . А вот, что такое подвод энтропии извне? Под этим понимается подвод тепла, поделенный на абсолютную температуру T . Но мы уже знаем, что в единицу объема материального тела в единицу времени поступает количество тепла, равное b . Следовательно, скорость подвода энтропии непосредственно в единицу объема равна b/T . В объем v непосредственно поступает количество энтропии равное

$$\int_v \frac{b}{T} dv.$$

Далее, через единицу площади поверхности материального тела в единицу времени поступает количество тепла, равное $(-g)$, как это было объяснено в разделе 3.2. Следовательно, скорость подвода энтропии через единицу поверхности равна $-g/T$. Через всю поверхность материального тела поступает количество энтропии, равное

$$\int_s \frac{(-g)}{T} ds.$$

После всех этих разъяснений можем представить аналитическую запись неравенства Клаузиуса – Дюгема. Она такова

$$\dot{s} \geq \int_v \frac{b}{T} dv + \int_s \frac{(-g)}{T} ds. \quad (3.42)$$

Рассмотрим частный случай, когда в пределах всего материального тела температура постоянна

$$T = \text{const.}$$

В этом случае температура может быть вынесена из-под знаков обоих интегралов (3.42). Это дает

$$\dot{s} \geq \frac{1}{T} \left(\int_v b dv + \int_s (-g) ds \right).$$

Но ведь в скобке здесь стоит скорость подвода тепла к материальному телу извне q , равная (3.14). Так что, получаем в этом случае

$$\dot{s} \geq \frac{q}{T}.$$

Умножив обе части этого равенства на dt , получим представление второго закона термодинамики в приращениях

$$ds \geq \frac{dQ}{T}, \quad (3.43)$$

где dQ — приращение подводимого тепла

$$dQ = q dt.$$

Неравенство (3.43) представляет формулировку второго закона термодинамики для частного случая, когда в пределах всего тела температура одинакова. Эта формулировка известна в литературе под названием неравенства Клаузиуса – Планка. Это вторая из трех десятков формулировок второго закона термодинамики. Для нас здесь важно то, что эта формулировка оказалась частным случаем формулировки в форме неравенства Клаузиуса – Дюгема. Неравенство Клаузиуса – Планка обычно формулируется и обосновывается в курсах физики для высших учебных заведений.

Обращаем внимание на то, что неравенство (3.42) представляет интегральную форму второго закона термодинамики.

Получим локальную форму.

Для этого, во-первых, примем сильное предположение о том, что внутренняя энтропия материального тела представляет аддитивную функцию его массы, т. е.

$$s = \int_v S \rho dv,$$

где S обозначает плотность внутренней энтропии на единицу массы.

Во-вторых, используем выражение поверхностного теплового потока g по (3.21). Получим

$$\int_v \dot{S} \rho dv \geq \int_v \frac{b}{T} dv - \int_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{T} ds. \quad (3.44)$$

Интеграл по поверхности запишем иначе

$$\int_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{T} ds = \int_s \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right) ds$$

и преобразуем его в объемный по формуле Гаусса – Остроградского. Тогда получим

$$\int_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{T} ds = \int_v \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right) dv.$$

Подставляя этот результат в (3.44), приходим к неравенству, записанному для объемных интегралов

$$\int_v \dot{S} \rho dv \geq \int_v \left(\frac{b}{T} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right) \right) dv.$$

Какое суждение можно высказать о подынтегральных функциях, объемные интегралы от которых связаны знаком неравенства? Как и выше, следует учесть, что область интегрирования произвольна. Это позволяет безусловно заключить: подынтегральные выражения связаны тем же знаком неравенства, что и интегралы от них, взятые по произвольным объемам, т.е.

$$\rho \dot{S} \geq \frac{b}{T} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right). \quad (3.45)$$

Доказать справедливость этого неравенства можно, используя схему доказательства методом от противного.

Вычислим операцию дивергенции, стоящую в правой части. Для этого представим это выражение в следующей форме

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right) = \nabla \cdot \left(\mathbf{h} \left(\frac{1}{T} \right) \right).$$

Мы видим, что оператор Гамильтона здесь действует на произведение. Так что, находим

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right) = \overset{\rightarrow}{\nabla} \cdot \left(\mathbf{h} \left(\frac{1}{T} \right) \right) + \overset{\uparrow}{\nabla} \cdot \left(\mathbf{h} \left(\frac{1}{T} \right) \right).$$

Используя правила векторной алгебры, преобразуем выражения, стоящие в правой части так, чтобы оператор Гамильтона оказался рядом с тем объектом, на который он действует, как оператор дифференцирования. Результат таков

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{h}}{T} \right) = \frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{h}) + \left(\nabla \left(\frac{1}{T} \right) \right) \cdot \mathbf{h}. \quad (3.46)$$

А как вычислить градиент

$$\nabla \left(\frac{1}{T} \right)?$$

Очевидно, что так

$$\nabla \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} (\nabla T). \quad (3.47)$$

Подставляя (3.47) в (3.46) и далее в (3.45), получим

$$\rho \dot{S} \geq \frac{1}{T} (b - \nabla \cdot \mathbf{h}) + \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot (\nabla T). \quad (3.48)$$

Здесь появилась новая важная величина — градиент температуры ∇T . Она характеризует температурную напряженность в точках материального тела: чем больше градиент температуры, тем быстрее меняется температура при переходе от одной точки материального тела. А это ведь что-нибудь да значит! Поэтому градиент температуры заслуживает специального обозначения. Обозначим его $\mathbf{\Gamma}$, т. е.

$$\mathbf{\Gamma} = \nabla T. \quad (3.49)$$

С использованием $\mathbf{\Gamma}$ неравенство (3.48) запишется так

$$\rho \dot{S} \geq \frac{1}{T} (b - \nabla \cdot \mathbf{h}) + \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma}. \quad (3.50)$$

Это неравенство можно упростить, используя уравнение первого закона термодинамики (3.37). Ведь оба соотношения (3.37) и (3.50) содержат одну и ту же комбинацию $b - \nabla \cdot \mathbf{h}$! Ее можно исключить из (3.50). Сделаем это, попутно умножая обе части неравенство (3.50) на T и учитывая, что по (3.37) имеем

$$b - \nabla \cdot \mathbf{h} = \rho \dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}.$$

Приходим к неравенству

$$\rho T \dot{S} \geq \rho \dot{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma}.$$

Его удобно переписать иначе, перенося все члены правой части в левую. Тогда получим

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{U} - T\dot{S}) - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (3.51)$$

Опять же из соображений удобства введем в рассмотрение новую величину — свободную энергию Гельмгольца

$$\psi = U - TS. \quad (3.52)$$

Тогда неравенство (3.51) преобразуется к следующему виду

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (3.53)$$

Эта версия второго закона термодинамики называется универсальным диссипативным неравенством.

Следует, конечно, задуматься над тем, почему появились слова «диссипативное» и «универсальное». Первое слово понятно.

Комбинация

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T}$$

обозначается Φ и называется диссипативной функцией

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T}. \quad (3.54)$$

С использованием этого обозначения неравенство (3.53) переписывается так

$$\Phi - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (3.55)$$

Так что, понятно появление слова «диссипативное». Оно появилось просто потому, что в него входит диссипативная функция. А вот почему появилось слово «универсальное»? Так дело вот в чем. В механике часто выставляется требование диссипативности механических процессов

$$\Phi \geq 0. \quad (3.56)$$

Оно отражает тот факт, что механическая энергия может только рассеиваться, то есть только уменьшаться, говоря точнее, не может самопроизвольно увеличиваться. С другой стороны, в теории теплопроводности весьма популярно неравенство Фурье

$$-\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (3.57)$$

Физический смысл этого неравенства в том, что тепло не может распространяться самопроизвольно от холодного к горячему.

Действительно, направление распространения тепла задает вектор теплового потока \mathbf{h} , а тот факт, где горячее, выражает вектор $\mathbf{\Gamma}$ — градиент температуры. Неравенство (3.57) выражает требование: оба вектора \mathbf{h} и $\mathbf{\Gamma}$ не должны быть расположены под острым углом! В самом деле неравенство (3.57) может быть записано, согласно определению скалярного произведения

$$-\|\mathbf{h}\|\|\mathbf{\Gamma}\|\cos(\mathbf{h}, \mathbf{\Gamma}) \geq 0.$$

Полагаем, что \mathbf{h} и $\mathbf{\Gamma}$ заданы в одних и тех же единицах, более того в одном масштабе. Такое согласование можно сделать, умножив обе части (3.57) на положительный множитель.

Косинус угла между вектором теплового потока и вектором градиента температуры должен быть отрицательным или нулем, но никак не положительным. Значит угол между этими векторами лежит в интервале $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, т. е. должен быть тупым.

Теперь мы уже видим, что неравенство (3.55) объединяет неравенства (3.56) и (3.57) в одно! Отсюда и появилось слово «универсальное».

Замечание 3.3. Между прочим неравенства (3.56) и (3.57) представляют частные формулировки второго закона термодинамики, примененные к разным видам движения: (3.56) к механическому, а (3.57) к тепловому. Но ведь второй закон термодинамики один, и этот один закон выражает одно универсальное диссипативное неравенство (3.55)!

Для удобства последующих рассуждений преобразуем уравнение первого закона термодинамики, вводя в него свободную энергию Гельмгольца. С помощью (3.52) находим

$$\dot{U} = \dot{\psi} + T\dot{S} + S\dot{T}.$$

Внося это выражение в (3.22), получаем

$$\rho T\dot{S} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (3.58)$$

С некоторым удивлением обнаруживаем и здесь диссипативную функцию Φ , заданную формулой (3.54). Таким образом, уравнение первого закона термодинамики можно записать и так

$$\rho T\dot{S} = \Phi + b - \nabla \cdot \mathbf{h}.$$

Опять подтверждается интерпретация уравнения первого закона термодинамики: это уравнение теплопроводности, усложненное присутствием слагаемого Φ , выражающего диссипацию механической энергии. Это слагаемое стоит рядом с b и поэтому выражает приток тепла за счет диссипации механической энергии.

3.9. Третий закон термодинамики

Третий закон термодинамики называют иногда законом Нернста. Формулировка этого закона такова: если абсолютная температура материального тела T стремится к нулю, то его внутренняя энтропия s тоже стремится к нулю.

Это утверждение можно распространить и на единицу массы материального тела. Если $T \rightarrow 0$, то $S \rightarrow 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в этом учебном пособии сформулированы и приспособлены к потребностям механики деформируемого тела все законы термомеханики. Всего их шесть — три закона механики и три закона термодинамики.

В число законов механики входят закон сохранения массы и два закона динамики Эйлера. В число законов термодинамики входят закон сохранения энергии, закон изменения энтропии и, наконец, третий закон — закон Нернста.

Никаких других законов в термомеханике нет!

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики т. 1, 2. — М.: Изд-во Наука, 1982. — 352 и 595 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Изд-во Мир, 1975. — 872 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Изд-во Наука, 1970. — 939 с.
4. Пальмов В. А. Плоская задача теории несимметричной упругости// Прикладная математика и механика. — 1964, т. 28, вып. 6. — С. 35-41.
5. Миндлин Р. Д. Микроструктуры в линейной упругости// Сб. переводов, «Механика», №2. — М.: Изд-во Мир, 1964. — С. 61-70.
6. Green A. E., Rivlin R.S., Multipolar continual mechanics, Arch. Rat. Mech. Anal., v. 17, 1964, С. 52-71.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1,2. — М.: Изд-во Наука, 1976. — 535 и 573 с.
8. Бабкин А. В., Селиванов В. В. Основы механики сплошных сред. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 273 с.
9. Пальмов В. А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа// Учеб. пособие. — СПб: Изд-во СПбГПУ, 2008. — 108 с.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Изд-во Дрофа, 2003. — 840 с.
11. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Изд-во Мир, 1975. — 592 с.
12. Трусделл К. Термодинамика для начинающих// Сб. переводов, «Механика», №3. — М.: Изд-во Мир, 1970. — С. 81-95.
13. Truesdell C. Rational thermodynamics — New York, St. Louis, San Francisco.: McGraw-Hill Book Company, 1969. — 208 с.

Учебное издание

Владимир Александрович ПАЛЬМОВ

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ
ТЕРМОМЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т. 2;
95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 07.11.2008. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. 7,0. Тираж 80. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором, в Цифровом
типографском центре Издательства Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 550-40-14.

Тел./факс: (812) 297-57-76.