

**Федеральное агентство по образованию**

---

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

**Приоритетный национальный проект «Образование»  
Инновационная образовательная программа  
Санкт-Петербургского государственного политехнического  
университета**

---

**В.А. ПАЛЬМОВ**

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ,  
ТЕРМОВЯЗКИХ И ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИХ  
МАТЕРИАЛОВ**

**Рекомендовано Учебно-методическим объединением по  
университетскому политехническому образованию в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки 150300 «Прикладная  
механика»**

**Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2008**

УДК 539.375(075.8)

ББК 22.22

Рецензенты:

Академик РАН, доктор физико-математических наук,  
профессор *Н. Ф. Морозов* (ИПМАШ РАН)  
Доктор физико-математических наук, профессор СПбГПУ  
*А. М. Кривцов*

*Пальмов В. А.* Определяющие уравнения термоупругих, термовязких и термопластических материалов: учеб. пособие / В. А. Пальмов. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. — 138 с.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту и содержанию примерной учебной программы дисциплины «Теория упругости».

К описанию поведения изотропных термоупругих, термовязких и термопластических материалов применены законы и методы современной теории определяющих уравнений. Продемонстрировано взаимное влияние тепловых и механических процессов. Учебное пособие рекомендуется бакалаврам и магистрам высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 150300 «Прикладная механика».

Учебное пособие может быть полезно для студентов, обучающихся по другим направлениям подготовки и специальностям техники и технологии в области машиностроения.

Работа выполнена в рамках реализации Инновационной образовательной программы Санкт-Петербургского государственного политехнического университета «Развитие политехнической системы подготовки кадров в инновационной среде науки и высокотехнологичных производств северо-западного региона России».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Пальмов В.А., 2009

© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>6</b>
<b>1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕРМОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА.....</b>	<b>8</b>
1.1. Определения и термодинамические ограничения .....	8
1.2. Анализ определяющего уравнения теплопроводности в нелинейной термоупругости .....	13
1.3. Альтернативное построение определяющих уравнений термоупругого материала, основанное на использовании комбинаций определяющих параметров, в которую входит мера деформации Коши – Грина .....	17
1.4. Другие формы представления тензора напряжений в нелинейной теории упругости .....	25
<b>2. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ДЕФОРМИРОВАНИЙ УПРУГОГО ТЕЛА .....</b>	<b>29</b>
2.1. Простейшие деформации в несжимаемом нелинейно упругом теле .....	29
2.2. Одноосное растяжение цилиндра со свободной боковой поверхностью .....	29
2.3. Двухосное изотропное растяжение пластинки со свободными лицевыми поверхностями .....	31
2.4. Чистый сдвиг .....	32
2.5. Трехосное равномерное растяжение.....	34
<b>3. ПРИМЕРЫ ПОТЕНЦИАЛОВ, НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....</b>	<b>36</b>
3.1. Простейшее обобщение потенциала линейной теории упругости — потенциал Джона .....	36

<b>3.2. Модифицированная мера деформации Коши – Грина .....</b>	<b>43</b>
<b>3.3. Группа потенциалов Муни – Ривлина .....</b>	<b>46</b>
<b>3.4. Упругий материал с потенциальной энергией в форме потенциала Огдена.....</b>	<b>53</b>
<b>3.5. Другие представления потенциалов упругих материалов .....</b>	<b>64</b>
<b>3.6. Общее рассуждение о возможной зависимости потенциалов упругости от температуры .....</b>	<b>67</b>
<b>3.7. О вычислении параметров потенциалов упругости по результатам экспериментов.....</b>	<b>73</b>
<b>4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКИХ МАТЕРИАЛОВ.....</b>	<b>76</b>
<b>4.1. Определение вязкого материала .....</b>	<b>76</b>
<b>4.2. Определяющие уравнения термовязкого материала и их предварительный общий анализ .....</b>	<b>77</b>
<b>4.3. Определяющие уравнения изотропного вязкого материала .....</b>	<b>80</b>
<b>4.4. Анализ определяющего уравнения термовязкого материала .....</b>	<b>88</b>
<b>5. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА .....</b>	<b>93</b>
<b>5.1. Особенности поведения пластических материалов .....</b>	<b>93</b>
<b>5.2. Условие текучести.....</b>	<b>94</b>
<b>5.3. Сравнение норм, используемых в теории пластичности.....</b>	<b>97</b>
<b>5.4. Уравнения пластического течения .....</b>	<b>101</b>
<b>5.5. Определяющие уравнения термопластического материала.....</b>	<b>107</b>
<b>6. МАТЕРИАЛЫ С ЧИСТЫМИ СВОЙСТВАМИ .....</b>	<b>113</b>
<b>6.1. Предварительные соображения об учете взаимного влияния механических и тепловых процессов .....</b>	<b>113</b>

<b>6.2. Определяющие уравнения для изотропных материалов с чистыми свойствами: теплопроводность и теплоемкость, упругость, вязкость, пластичность .....</b>	<b>116</b>
<b>6.3. Термоупругий материал .....</b>	<b>121</b>
<b>6.4. Термовязкий материал .....</b>	<b>133</b>
<b>6.5. Несжимаемый термопластический материал .....</b>	<b>135</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>137</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено применению основных принципов и положений современной теории определяющих уравнений к описанию материалов, в поведении которых проявляется взаимное влияние механических и тепловых процессов. Главный принцип этой теории — все влияет на все. Это означает, что определяющие параметры тепловых процессов — температура и ее градиент — влияют на протекание механических процессов, т.е. на возникающие напряжения, и обратно, определяющие параметры механических процессов — деформации — влияют на протекание тепловых процессов. В линейной теории такое взаимное влияние проявляется слабо. Проявляется влияние нагрева на возникающие удлинения. Обратное влияние удлинений на процесс теплопроводности обычно незаметно. При больших деформациях такое взаимовлияние становится уже существенным. Так что, представляемые уравнения оказываются неминуемо нелинейными. Поэтому областью применения описываемых ниже теорий являются такие явления, в которых деформации твердых тел велики или велики градиенты скоростей течения жидкостей.

Первая глава посвящена нелинейной теории упругости.

Упругие материалы находят широкое применение. Всякий инженер-конструктор предпочитает, чтобы вся конструкция находилась в упругом состоянии. Появление пластических деформаций рассматривается, как нежелательное явление, приближающее конструкцию к разрушению. Все сказанное накладывает ограничения на деформации: они должны быть малыми. Но если деформации малы, то можно с большим успехом применять линейный закон Гука, хорошо известный из курса «Сопrotивление материалов». Упоминание о нем содержится в разделе 1.8 учебного пособия [8].

Зачем же тогда нужна эта глава, целиком посвященная теории определяющих уравнений упругого материала? В ней будут получены и проанализированы определяющие уравнения нелинейных упругих материалов. Потребность в такой теории возникает при конструировании резиновых изделий, испытывающих большие деформации. Это разнообразные уплотнения, амортизаторы, автомобильные шины, и т.д.

Вторая и третья главы посвящены анализу поведения нелинейных упругих материалов и вариантов их описания.

Четвертая глава отведена рассмотрению термовязких и чисто вязких материалов. Продемонстрировано, что взаимное влияние течения и теплопроводности здесь проявляется наиболее сильно

Пятая глава содержит описание поведения идеальных чисто пластических материалов. Взаимное влияние термических и механических процессов учтено в последнем разделе этой главы.

Последняя глава посвящена рассмотрению определяющих уравнений материалов с чистыми свойствами — теплопроводность, упругость, вязкость, пластичность — и их применению к конструированию определяющих уравнений материалов с комбинированными свойствами.

Описание поведения материалов с чистыми свойствами заимствовано из книг [1] – [4]. Описание поведения сложных материалов заимствовано из [5].

Наконец, следует отметить, что настоящее учебное пособие представляет собой логическое продолжение учебных пособий [6] – [8]. В связи с этим в тексте этого пособия содержатся ссылки на конкретные формулы этих пособий. Поэтому для облегчения восприятия излагаемого материала рекомендуется предварительное изучение трех названных пособий.

# 1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕРМОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

## 1.1. Определения и термодинамические ограничения

*Определение 1.1.* Термоупругим называется такой материал, у которого реакции  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\psi$  и  $S$  зависят только от значений определяющих параметров в текущий момент времени  $t$ . Это значит, что весь термомеханический процесс не входит в определяющие уравнения. Таким образом, операторы в (1.15) из [8] заменяются функциями, и определяющие уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}), \\ \psi = \psi(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}), \\ S = S(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Изотропия материала позволяет исключить тензор поворота  $\mathbf{V}$  из числа аргументов определяющих уравнений. Действительно, по условиям изотропии (3.14) из [8], формально заменяя операторы на функции в соответствии с (3.14) из [8], получим следующие уравнения

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}) = \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}), \\ \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}) = \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}), \\ \psi(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}) = \psi(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}), \\ S(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V}) = S(T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}). \end{cases} \quad (1.2)$$

Но сюда входят все определяющие параметры в один только момент времени — текущий момент  $t$ . Это замечание относится и к тензору поворота  $\mathbf{V}$ . С другой стороны, тензор начального поворота  $\mathbf{H}$  постоянен, но имеет произвольное значение. В каждый момент времени подберем его так, чтобы он был равен

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}^T. \quad (1.3)$$

Но тогда получим

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{E},$$

и определяющие уравнения (1.2) существенно упростятся



$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}) = \boldsymbol{\sigma}(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{E}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}) = \mathbf{h}(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{E}), \\ \psi = \psi(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}) = \psi(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{E}), \\ S = S(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}) = S(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{E}). \end{cases} \quad (1.4)$$

Эти равенства показывают, что тензор поворота можно заменять на единичный тензор и даже вообще не записывать. Так что, число определяющих параметров сократилось, и мы имеем

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}), \\ \psi = \psi(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}), \\ S = S(T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}). \end{cases} \quad (1.5)$$

Обратимся теперь к универсальному диссипативному неравенству (1.29) из [8]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (1.6)$$

Входящую сюда материальную производную свободной энергии находим по правилам дифференцирования сложных функций

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T, \quad (1.7)$$

где введены обозначения

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{i}_k \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma_k}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \frac{\partial \psi}{\partial F_{kl}}.$$

Значение производной тензора Фингера находим по формуле (1.86) из [7]

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}).$$

Подставив этот результат в (1.7), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot ((\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega})) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot ((\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F}) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega})).$$

Стоящие в правой части двойные скалярные произведения преобразуем с помощью равенств (1.47), (1.48) из [6]

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot ((\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{F}) = \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega})) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} \right) \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}).$$

Подставляя все эти результаты в (1.7) и далее в (1.6), приведем диссипативное неравенство к виду линейного неравенства относительно  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\dot{T}$  и  $\dot{\mathbf{\Gamma}}$

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - 2\rho \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^S \right) \cdot \mathbf{D} + 2\rho \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^A \cdot \mathbf{\Omega} -$$

$$-\rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} + S \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0.$$

Используя теорему 1.1 из [8] о линейных неравенствах, получаем следующие уравнения и неравенство

$$\boldsymbol{\sigma} - 2\rho \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^S = 0, \quad (1.8)$$

$$\left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^A = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + S = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} = 0,$$

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} \leq 0. \quad (1.10)$$

Четвертое уравнение показывает, что вектор градиент температуры  $\mathbf{\Gamma}$  вообще не входит в представление свободной энергии, так что имеем

$$\psi = \psi(T, \mathbf{F}). \quad (1.11)$$

Третье из полученных уравнений дает представление плотности внутренней энтропии

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T},$$

из которого видно, что и последняя не зависит от градиента температуры, так что

$$S = S(T, \mathbf{F}).$$

Обратимся, наконец, к первому уравнению. Оно дает представление тензора напряжений. Как видно, оно также не зависит от градиента

температуры. Однако, из этого уравнения можно извлечь и больше. Воспользуемся разложением тензора Фингера в его главном базисе

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)}F_1 + \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)}F_2 + \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}F_3, \quad (1.12)$$

где  $F_i$  — главные значения тензора Фингера.

Внесем представление (1.12) в (1.11), и мы увидим, что свободная энергия зависит от элементов спектрального разложения (1.12), т.е. от  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $\mathbf{e}_{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_{(2)}$ ,  $\mathbf{e}_{(3)}$ . Имеем

$$\psi = \psi(T, F_1, F_2, F_3, \mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}).$$

Но главные значения являются корнями характеристического уравнения

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0,$$

где  $I_k$  — главные инварианты тензора Фингера.

Таким образом, зависимость  $\psi$  от главных значений можно заменить на зависимость от главных инвариантов  $\mathbf{F}$ . Задумаемся теперь над тем, как можно выразить зависимость от элементов базиса. Учтем, что речь идет об изотропном материале. Это означает, что в представление свободной энергии не входят никакие другие тензоры и векторы, кроме элементов разложения. А как может зависеть скаляр  $\psi$  от векторов  $\mathbf{e}_{(k)}$ ? Ответ прост: только через посредство скалярных комбинаций, которые можно из них образовать. Но базисные векторы  $\mathbf{e}_{(k)}$  ортонормированы. Значит

$$\mathbf{e}_{(k)} \cdot \mathbf{e}_{(l)} = \delta_{kl}.$$

Это только либо нули, либо единицы. Так что нет никакой необходимости указывать на эту зависимость. Таким образом, получаем

$$\psi = \psi(T, I_1, I_2, I_3). \quad (1.13)$$

Вычислим производную (1.13) по  $\mathbf{F}$ . Имеем по правилу дифференцирования сложной функции:  $\psi$  зависит от  $\mathbf{F}$  через посредство его главных инвариантов. Так что получаем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{dI_1}{d\mathbf{F}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{dI_2}{d\mathbf{F}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \frac{dI_3}{d\mathbf{F}}.$$

Чтобы продвинуться дальше, нужно вычислить производные инвариантов  $I_k$  по тензору Фингера. Имеем

$$I_1 = \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{F}.$$

Дифференцируя по времени, найдем

$$\dot{I}_1 = \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T.$$

Учитывая симметрию тензора  $\mathbf{F}$  и приравнивая друг другу коэффициенты при  $\dot{\mathbf{F}}$ , находим

$$\frac{dI_1}{d\mathbf{F}} = \mathbf{E}.$$

Далее, имеем по (1.144) из [6]

$$I_1^2 - 2I_2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}.$$

Вычисляя производную по времени, получим

$$2I_1 \frac{dI_1}{d\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}} - 2 \frac{dI_2}{d\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{dI_2}{d\mathbf{F}} = -\mathbf{F} + I_1 \frac{dI_1}{d\mathbf{F}} = -\mathbf{F} + I_1 \mathbf{E}.$$

Что касается производной  $I_3$ , то ее мы уже вычисляли. Она дается формулой подобной (2.12) из [7]

$$\frac{dI_3}{d\mathbf{F}} = I_3 \mathbf{F}^{-T} = I_3 \mathbf{F}^{-1}.$$

Результат всех этих вычислений таков

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{E} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (-\mathbf{F} + I_1 \mathbf{E}) + I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{F}^{-1}. \quad (1.14)$$

Наконец, вычисляем комбинацию

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{E} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{F} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \mathbf{F}^2.$$

Легко увидеть, что это симметричный тензор. Так что,

$$\left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^A = 0.$$

Таким образом, условия (1.9) выполняются тождественно, а уравнение (1.8) дает следующее представление тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_3} I_3 \mathbf{E} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{F} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \mathbf{F}^2 \right). \quad (1.15)$$

С учетом представления плотности по (2.8) из [7] находим окончательно

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_3} I_3 \mathbf{E} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{F} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \mathbf{F}^2 \right).$$

Это выражение представляет частный случай уравнения (2.49) из [8]. Несомненно, что оно удовлетворяет принципу материальной объективности. Оно удовлетворяет также утверждению теоремы 3.1 из [8] об определяющих уравнениях изотропных материалов.

Подведем итог проведенному анализу. Универсальное термодинамическое неравенство внесло существенные коррективы в предполагаемый вид определяющих уравнений (1.5). Оказалось, что свободная энергия не зависит от градиента температуры. Кроме того, она оказалась производящей функцией как для плотности внутренней энтропии, так и для тензора напряжений.

## 1.2. Анализ определяющего уравнения теплопроводности в нелинейной термоупругости

Обратимся теперь к последнему ограничению, которое дало универсальное термодинамическое неравенство. Это неравенство (1.10). Это знаменитое неравенство Фурье для вектора теплового потока. Оно декларирует: в термоупругом теле тепло не может самопроизвольно распространиться от холодных участков к горячим. Вот и все! Никаких других ограничений на структуру вектора теплового потока оно не выставляет. Вместе с тем, в соответствии с нашим предположением (1.5) вектор теплового потока в термоупругом и изотропном материале, в принципе, может зависеть не только от температуры и ее градиента, но и от меры деформации Фингера. Выясним, как выглядит такая зависимость в общем случае изотропного материала. В соответствии с теоремой 3.1 из [8] никаких других тензоров в эту зависимость не должно входить. Как же можно сконструировать вектор теплового потока из вектора градиента температуры  $\boldsymbol{\Gamma}$  и меры деформации Фингера? Очевидно, что в эту конструкцию должны входить векторы

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Gamma}, \quad \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Gamma}, \quad \mathbf{F}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma}.$$

Линейная комбинация этих трех векторов может представить вектор теплового потока, т.е.

$$\mathbf{h} = -(k_0 \mathbf{E} + k_1 \mathbf{F} + k_2 \mathbf{F}^2) \cdot \mathbf{\Gamma}. \quad (1.16)$$

Коэффициенты теплопроводности  $k_i$  в общем случае изотропного материала могут быть функциями взаимных инвариантов системы двух объектов  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{\Gamma}$ . Разберемся в этом вопросе. Для этого зададим тензор Фингера в главном базисе (1.12) и в этом же базисе зададим вектор теплового потока

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{e}_{(k)} \Gamma_k = \mathbf{e}_{(1)} \Gamma_1 + \mathbf{e}_{(2)} \Gamma_2 + \mathbf{e}_{(3)} \Gamma_3.$$

Взаимными инвариантами системы  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{\Gamma}$ , очевидно, будут  $F_1, F_2, F_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ . Всего их шесть. Их можно заменить, например, алгебраическими инвариантами  $I_1, I_2, I_3, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{\Gamma}$ . Так что, коэффициенты теплопроводности могут быть функциями температуры и этих шести инвариантов

$$k_i = k_i(T, I_1, I_2, I_3, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{\Gamma}).$$

Подставим разложение (1.16) в неравенство Фурье (1.10). Получим

$$k_0 \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} + k_1 \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma} + k_2 \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0. \quad (1.17)$$

Поскольку коэффициенты теплопроводности  $k_i$  являются сложными функциями взаимных инвариантов, выписать необходимые и достаточные условия выполнения (1.17) не представляется возможным. А вот достаточные условия находятся легко. Это условия

$$k_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Обсудим теперь вопрос о том, какие процессы в термоупругом материале являются обратимыми, а какие необратимыми.

В соответствии с определением, обратимыми являются все процессы в термоупругом материале, для которых неравенства (1.10), (1.17) выполняются со знаком равенства

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} = 0.$$

Это все процессы, не связанные с переносом тепла.

В соответствии с тем же определением, необратимыми являются всякие процессы в термоупругом материале, для которых неравенства (1.10), (1.17) выполняются со знаком неравенства

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} < 0.$$

Это всякие процессы, связанные с переносом тепла.

Составим, наконец, уравнение первого закона термодинамики (3.58) из [7]

$$\rho T \dot{S} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}}_{\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (1.18)$$

Выше было найдено представление плотности внутренней энтропии

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T}.$$

Продифференцируем это выражение по времени. Получим

$$\dot{S} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T.$$

Произведение

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T$$

мы уже вычисляли. Оно встречалось в (1.7). Результат этих вычислений таков

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T = 2 \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right)^S \cdot \mathbf{D}.$$

Сравнивая его с (1.8), находим следующее выражение

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}.$$

Подстановка его в выражение  $\dot{S}$  дает уравнение

$$\dot{S} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial T} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}).$$

Наконец, подставим это выражение в уравнение первого закона термодинамики (1.18). Учтем также, что сумма подчеркнутых слагаемых в правой части обращается в нуль: точно такая же сумма уже встречалась ранее в диссипативном неравенстве (1.6), и там она обратилась в нуль. В результате получаем

$$\rho \left( -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right) \dot{T} - T \frac{\partial}{\partial T} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (1.19)$$

Коэффициент при  $\dot{T}$  занимает здесь место теплоемкости, как в стандартном уравнении теплопроводности. Поэтому целесообразно ввести обозначение

$$C_{\rho} = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}$$

и переписать уравнение теплопроводности (1.19) в следующем виде

$$\rho C_{\rho} \dot{T} - T \frac{\partial}{\partial T} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (1.20)$$

Индекс  $\rho$  при коэффициенте теплоемкости обозначает, что это теплоемкость в момент, когда  $\mathbf{D} = 0$ , т.е. при  $\rho = \text{const}$ . Уравнение (1.20)  
<sub>t, r</sub>

демонстрирует, что механические процессы в термоупругом материале взаимодействуют с тепловыми при всяких деформациях, а не только при объемных, как это бывает в материалах при малых деформациях.

Используем введенное выше определение теплоемкости

$$C_{\rho} = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}$$

для вычисления плотности энтропии. Для этого перепишем последнее равенство в следующей форме

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} = -\frac{C_{\rho}}{T}.$$

Если проинтегрировать обе части этого неравенства по  $T$  и воспользоваться формулой для  $S$ , получим

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = \int_{T_*}^T \frac{C_{\rho}}{T} dT + A(\mathbf{F}).$$

По третьему закону термодинамики находим, что при  $T \rightarrow 0$  плотность энтропии  $S$  должна стремиться к нулю, так что будем иметь

$$\int_{T_*}^0 \frac{C_{\rho}}{T} dT + A(\mathbf{F}) = 0.$$

Определив отсюда  $A(\mathbf{F})$  и подставив результат в представление плотности энтропии, получим

$$S = \int_0^T \frac{C_{\rho}}{T} dT.$$

Во всех исследованиях этого раздела мы последовательно использовали тензор Фингера в качестве определяющего параметра. Однако, подобные исследования можно провести, используя другие меры



деформаций. Мы приводим ниже рассуждение, основанное на использовании наиболее популярной меры деформации Коши – Грина, определяемой по (1.19) из [7].

### **1.3. Альтернативное построение определяющих уравнений термоупругого материала, основанное на использовании комбинаций определяющих параметров, в которую входит мера деформации Коши – Грина**

Модель термоупругого материала играет важную роль в механике деформируемого тела. Именно по этой причине мы приводим альтернативное построение определяющих уравнений термоупругого материала. В логическом плане оно даже проще, чем было в разделе 1.1. Важно отметить, что мы получим совершенно другие определяющие уравнения термоупругого материала. Однако мы докажем, что они эквивалентны уравнениям раздела 1.1 в случае изотропии. В соответствии со сказанным в заглавии этого раздела, выбираем в качестве определяющих параметров комбинацию (1.4) из [8]

$$T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}. \quad (1.21)$$

Напоминаю, что  $T$ , как и раньше, абсолютная температура,  $\Gamma$  — ее градиент,  $\mathbf{G}$  — мера деформации Коши – Грина, а тензор  $\mathbf{O}$  — тензор поворота из полярного разложения тензора градиента деформации (1.18) из [7]

$$\left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}. \quad (1.22)$$

Напоминаю также, что здесь  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  — правый и левый тензоры искажений.

С использованием комбинации определяющих параметров (1.21) уравнения термоупругого материала записываются так

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}), \\ \psi = \psi(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}), \\ S = S(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}). \end{cases} \quad (1.23)$$

Круглые скобки обозначают то, что здесь речь идет о функциональной зависимости, а не об операторной, как в общем виде (1.17) из [8].

Так же, как в разделе 1.2 используем универсальное диссипативное неравенство (1.6)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (1.24)$$

Материальную производную свободной энергии материала находим по правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \dot{\mathbf{G}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}} \cdot \dot{\mathbf{O}}^T.$$

Значение производной от  $\mathbf{G}$  находим по формуле (1.84) из [7]

$$\dot{\mathbf{G}} = 2 \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right).$$

Это дает следующее представление скорости изменения свободной энергии

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \left( 2 \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}} \cdot \dot{\mathbf{O}}^T.$$

Используя правила тензорной алгебры (1.47) и (1.48) из [6]

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{T}),$$

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{P},$$

преобразуем третье слагаемое в этой сумме к следующему виду

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \left( 2 \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{D} \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \right) = \left( 2 \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \right) \cdot \mathbf{D}.$$

В результате этого преобразования  $\dot{\psi}$  принимает следующий вид

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \left( 2 \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \right) \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}} \cdot \dot{\mathbf{O}}^T.$$

Остается подставить это представление в универсальное диссипативное неравенство (1.24). Комбинируя однотипные слагаемые, получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} & \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\rho \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \right) \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} + S \right) \dot{T} - \\ & - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}} \cdot \dot{\mathbf{O}}^T - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

В это неравенство величины  $\mathbf{D}$ ,  $\dot{T}$ ,  $\dot{\Gamma}$  и  $\dot{\mathbf{O}}^T$  входят линейно. Кроме этого примем во внимание, что они могут принимать произвольные значения, не зависящие от аргументов  $T$ ,  $\Gamma$ ,  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{O}$ , которые входят в коэффициенты. По теореме о линейных неравенствах находим следующие необходимые и достаточные условия его выполнения при произвольных значениях линейно входящих аргументов  $\mathbf{D}$ ,  $\dot{T}$ ,  $\dot{\Gamma}$  и  $\dot{\mathbf{O}}^T$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} - 2\rho \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial T} + S &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{O}} &= 0, \\ -\frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \Gamma &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Может возникнуть недоумение по поводу того, как из одного только неравенства (1.25) можно получить сразу четыре уравнения и еще одно неравенство. Секрет этого феномена в том, что неравенство (1.25) должно выполняться при произвольном термомеханическом процессе. А таких процессов бесконечно много, и для каждого из них можно записать неравенство (1.25). Фактически за одним неравенством (1.25) стоит бесконечное число неравенств. Так что, читателя не должно удивлять, что мы получили всего только четыре уравнения и одно неравенство. Вместе с тем, это необходимые и достаточные условия, и поэтому ничего большего из (1.25) извлечь нельзя.

Сделаем выводы из (1.26). Третье и четвертое уравнения показывают, что свободная энергия не зависит от градиента температуры  $\Gamma$  и от тензора поворота  $\mathbf{O}$ .

Таким образом, третья строчка в (1.23) должна быть существенно упрощена и записана так

$$\psi = \psi(T, \mathbf{G}). \tag{1.27}$$

Из второго уравнения (1.26) находим

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = S(T, \mathbf{G}). \quad (1.28)$$

Наконец, из первого уравнения (1.26) находим важную формулу для напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right). \quad (1.29)$$

Из уравнений (1.28) и (1.29) видно, что свободная энергия оказалась производящей функцией для внутренней энтропии и для тензора напряжений.

*Замечание 1.1.* Уместно обратить внимание читателя на то, что формулы (1.27), (1.28) и (1.29) получены без привлечения требования изотропии материала. Таким образом, они справедливы для анизотропных термоупругих материалов, а не только для изотропных, каковыми были формулы раздела 1.1.

Итак, второй закон термодинамики в форме универсального диссипативного неравенства внес существенные коррективы в структуру определяющих уравнений термоупругого материала. Эти коррективы заданы соотношениями (1.27), (1.28) и (1.29).

Обратимся теперь к требованиям принципа материальной объективности (2.29) из [8]. Мы намерены доказать, что первое, третье и четвертое требования выполнены. Начнем с третьего. С учетом (1.27) оно имеет вид

$$\psi(T_Q, \mathbf{G}_Q) = \psi(T, \mathbf{G}). \quad (1.30)$$

По (2.17) из [8] имеем

$$T_Q = T. \quad (1.31)$$

Далее, обращаемся к уравнению (2.5) из [8], которое имеет вид

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{R}, t).$$

Отсюда легко находим

$$\mathbf{r}_Q \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{Q} \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right). \quad (1.32)$$

Мера деформации Коши – Грина вычисляется по формуле (1.19) из [7]

$$\mathbf{G} = \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right).$$

Для  $\mathbf{Q}$  – движения эта мера деформации находится подобным же образом

$$\mathbf{G}_Q = \left( \dot{\nabla} \mathbf{r}_Q \right) \cdot \left( \mathbf{r}_Q \dot{\nabla} \right).$$

Если теперь учесть (1.32), то получим

$$\mathbf{G}_Q = \left( \dot{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \left( \mathbf{r} \dot{\nabla} \right) = \left( \dot{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left( \mathbf{r} \dot{\nabla} \right) = \mathbf{G}. \quad (1.33)$$

Принимая во внимание (1.31) и (1.33), убеждаемся, что (1.30) выполнено тождественно. Точно так же убеждаемся, что выполнено и четвертое условие принципа материальной объективности

$$S(T_Q, \mathbf{G}_Q) = S(T, \mathbf{G}).$$

Обратимся теперь к первому условию (1.26). Очевидно, имеем по (1.29)

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = 2\rho \left( \mathbf{r}_Q \dot{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi_Q}{\partial \mathbf{G}_Q} \cdot \left( \dot{\nabla} \mathbf{r}_Q \right).$$

Учитывая (1.32), (1.30) и (1.33), легко убеждаемся в выполнении соотношений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_Q &= 2\rho \left( \mathbf{r}_Q \dot{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \dot{\nabla} \mathbf{r}_Q \right) = 2\rho \left( \mathbf{Q} \cdot \left( \mathbf{r} \dot{\nabla} \right) \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \left( \dot{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{Q}^T \right) = \\ &= \mathbf{Q} \cdot \left( 2\rho \left( \mathbf{r} \dot{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \dot{\nabla} \mathbf{r} \right) \right) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T. \end{aligned}$$

Итак, и первое требование принципа материальной объективности выполнено тождественно.

Докажем теперь, что в случае изотропного материала представление (1.29) может быть преобразовано к виду, в точности совпадающему с (1.15), полученному при первом подходе.

Рассуждение начнем с выражения свободной энергии. Очевидно, что для изотропного материала она выражается через главные инварианты меры деформации Коши – Грина. Итак, имеем тождество

$$\psi = \psi(T, \mathbf{G}) = \psi(T, I_1(\mathbf{G}), I_2(\mathbf{G}), I_3(\mathbf{G})). \quad (1.34)$$

По аналогии с (1.14) получим значение производной

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{E} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (-\mathbf{G} + I_1 \mathbf{E}) + I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{G}^{-1}.$$

Подставив эту производную в уравнение (1.29), придем к соотношению

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & 2\rho \left( \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{E} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial I_1} - \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{G} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial I_2} + \right. \\ & \left. + \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{E} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} + \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Воспользовавшись формулами (1.19) и (1.20) из [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right), \\ \mathbf{F} &= \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right), \end{aligned}$$

вычислим входящие сюда комбинации

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{E} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) &= \mathbf{F}, \\ \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{G} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) &= \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \mathbf{F}^2, \\ \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) &= \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right)^{-1} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)^{-1} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right) = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Подставив их в (1.35), получим очень похожее на (1.15) уравнение

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{E} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{F} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \mathbf{F}^2 \right). \quad (1.36)$$

Остается напомнить, что в (1.36) фигурируют главные инварианты меры деформации Коши – Грина, а в (1.15) — главные инварианты меры деформации Фингера. Но ведь они равны друг другу просто потому, что в силу (1.38) из [7] равны их главные значения.

Таким образом, выражение (1.36) полностью совпадает с (1.15).

Обсудим теперь вопрос о векторе теплового потока в термоупругом материале. Пока о нем известно очень мало. Первое, что известно, записано во второй строке определяющих уравнений (1.23)

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}). \quad (1.37)$$

Второе, что известно, это неравенство Фурье, задаваемое пятой строчкой термодинамических условий (1.26). Третье, что известно, так это требование принципа материальной объективности (2.29) из [8]

$$\mathbf{h}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}.$$

Запишем его подробно, используя представление (1.37)

$$\mathbf{h}(T_Q, \Gamma_Q, \mathbf{G}_Q, \mathbf{O}_Q) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}). \quad (1.38)$$

По (2.17) из [8] имеем

$$T_Q = T,$$

а по (2.18) из [8] —

$$\Gamma_Q = \mathbf{Q} \cdot \Gamma.$$

Наконец, по (1.33) находим

$$\mathbf{G}_Q = \mathbf{G},$$

а по (1.32) и (1.22) — еще одно соотношение

$$\mathbf{O}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{O}.$$

Учитывая все это в (1.38), получим

$$\mathbf{h}(T, \mathbf{Q} \cdot \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}). \quad (1.39)$$

Напоминаю читателю, что сюда входит тензор  $\mathbf{Q}$ , который произвольным образом зависит только от времени, так что

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t).$$

Остальные аргументы в (1.39) зависят и от времени и от материальной координаты  $\mathbf{R}$ . Важно иметь в виду, что в (1.39) все аргументы зависят всего лишь от одного момента времени  $t$ : вся история термомеханического процесса сюда не входит! Поэтому для каждой материальной точки  $\mathbf{R}$  можно подобрать такое  $\mathbf{Q}$ , при котором произведение  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{O}$  обратится в единицу

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{E}.$$

Соответствующее  $\mathbf{Q}$  таково

$$\mathbf{Q} = \mathbf{O}^T.$$

Подставив это значение в (1.39), получим

$$\mathbf{h}(T, \mathbf{O}^T \cdot \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{E}) = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}).$$

Отсюда находим

$$\mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{O}) = \mathbf{O} \cdot \mathbf{h}(T, \mathbf{O}^T \cdot \Gamma, \mathbf{G}, \mathbf{E}). \quad (1.40)$$

Таким образом, зависимость от  $\mathbf{O}$  выделилась явно. Кроме того, аргумент  $\mathbf{E}$  в правой части является постоянным. Его можно вообще не писать.

Чтобы продвинуться в своих рассуждениях дальше, учтем изотропию материала. Для изотропных материалов справедлива теорема 3.1 из [8]: в определяющие уравнения изотропного материала не входят никакие другие тензоры и векторы, кроме тех тензоров и векторов, которые являются определяющими параметрами либо такими тензорами, которые являются изотропными тензорами четного ранга. Это означает, что в структуру функции (1.40) входят только тензоры и векторы, которые указаны в (1.40). Рассмотрим только функцию, стоящую справа, т.е.

$$\mathbf{h}(T, \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{G})$$

и зададим себе вопрос, как может этот вектор зависеть от вектора  $\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}$  и тензора  $\mathbf{G}$ . Подобный вопрос мы уже обсудили в разделе 1.2 и пришли, в результате, к векторной функции (1.16).

Применяя это разложение к рассматриваемому случаю, получим разложение

$$\mathbf{h}(T, \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{G}) = -\left(k_0 \mathbf{E} + k_1 \mathbf{G} + k_2 \mathbf{G}^2\right) \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}, \quad (1.41)$$

в котором  $k_0$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — функции инвариантов и взаимных инвариантов системы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}$  и, конечно же, температуры, т.е.

$$k_i = k_i\left(T, I_1, I_2, I_3, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{G}^2 \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{\Gamma}\right). \quad (1.42)$$

Подставив (1.41) в (1.40), получим следующее разложение

$$\mathbf{h} = -\left(k_0 \mathbf{O} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{O}^T + k_1 \mathbf{O} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{O}^T + k_2 \mathbf{O} \cdot \mathbf{G}^2 \cdot \mathbf{O}^T\right) \cdot \mathbf{\Gamma}. \quad (1.43)$$

Легко заметить, что здесь выделился тензор Фингера  $\mathbf{F}$  и его квадрат

$$\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{O}^T, \quad \mathbf{F}^2 = \mathbf{O} \cdot \mathbf{G}^2 \cdot \mathbf{O}^T.$$

Эти формулы легко следуют из (1.19) и (1.20) из [7].

Таким образом, можем переписать уравнение (1.43) в следующей форме

$$\mathbf{h} = -\left(k_0 \mathbf{E} + k_1 \mathbf{F} + k_2 \mathbf{F}^2\right) \cdot \mathbf{\Gamma}. \quad (1.44)$$



Легко увидеть, что тензор Фингера выделился и в коэффициентах  $k_i$  по (1.42), так что имеем

$$k_i = k_i(T, I_1, I_2, I_3, \Gamma^2, \Gamma \cdot \mathbf{F} \cdot \Gamma, \Gamma \cdot \mathbf{F}^2 \cdot \Gamma). \quad (1.45)$$

Остается напомнить, что главные инварианты тензоров  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{F}$  равны друг другу, так что можно считать, что в (1.45) входят только инварианты и взаимные инварианты системы  $\mathbf{F}, \Gamma$ .

Результат всех рассуждений таков: выражение вектора теплового потока (1.44) совпадает с выражением (1.16). Прямой и альтернативный подход привели к одному и тому же результату.

#### 1.4. Другие формы представления тензора напряжений в нелинейной теории упругости

Подведем промежуточный итог. В разделе 1.1 было получено представление (1.15), а в разделе 1.3 — представление (1.29) для тензора напряжений. Более того, доказано, что они эквивалентны. Говоря более определенно, доказано, что для изотропного материала второе представление путем тождественных преобразований может быть приведено к первому. Ниже мы приведем и другие тоже эквивалентные названным формы представления напряжений через свободную энергию.

Начнем с представления (1.15) или (1.36). Оно таково

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{E} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{F} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \mathbf{F}^2 \right). \quad (1.46)$$

Вспомним уравнение Кели – Гамильтона для тензора Фингера

$$-\mathbf{F}^3 + I_1 \mathbf{F}^2 - I_2 \mathbf{F} + I_3 \mathbf{E} = 0$$

и умножим обе его части на  $\mathbf{F}^{-1}$ . Получим следующий результат

$$-\mathbf{F}^2 + I_1 \mathbf{F} - I_2 \mathbf{E} + I_3 \mathbf{F}^{-1} = 0,$$

который позволяет выразить  $\mathbf{F}^2$ . Находим

$$\mathbf{F}^2 = I_1 \mathbf{F} - I_2 \mathbf{E} + I_3 \mathbf{F}^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (1.46), получаем

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( \left( I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} + I_2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} + \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{F} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_3 \mathbf{F}^{-1} \right). \quad (1.47)$$

Допустим, что модуль объемного сжатия имеет большую величину. Это означает, что при  $I_3 \neq 1$  величина  $\frac{\partial \psi}{\partial I_3}$  оказывается очень большой. Последняя может оказаться ограниченной только при  $I_3 \rightarrow 1$ . Обозначим  $-p$  коэффициент при  $\mathbf{E}$  в выражении (1.47)

$$-p = 2\rho \left( I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} + I_2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right).$$

Тогда получим в (1.47) следующий предел

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \frac{\rho}{\rho_0} \left( 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} \mathbf{F} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} I_3 \mathbf{F}^{-1} \right). \quad (1.48)$$

Здесь введено обозначение

$$w = \rho_0 \psi.$$

Вновь появившуюся величину  $w$  называем потенциальной энергией единицы объема в недеформированном состоянии. Неопределенная при  $I_3 \rightarrow 1$  величина  $p$ , конечно же, не является давлением, но определяет его.

Воспользуемся теперь спектральными разложениями тензоров  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}^{-1}$  (1.42) и (1.43) из [7]

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{V(k)} V_k^2,$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{V(k)} V_k^{-2}$$

и получим координаты тензора напряжений в базисе левого тензора искажений  $\mathbf{e}_{V(k)}$

$$\sigma_{kk} = -p + \frac{\rho}{\rho_0} \left( 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} V_k^2 - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} I_3 V_k^{-2} \right), \quad \left( \frac{\sum}{/k} \right). \quad (1.49)$$

Напоминаю, что  $V_k$  — главные значения левого тензора искажений  $\mathbf{V}$  по (1.35) из [7]. Представление (1.49) очень популярно в механике несжимаемого упругого материала, для которого  $I_3 = 1$ .

Сосредоточим теперь свое внимание на случае, когда потенциальная энергия  $w$  задана, как функция главных значений тензора  $\mathbf{G}$

$$w = \rho_0 \psi = w(T, U_1^2, U_2^2, U_3^2).$$

Напомним, что здесь  $U_k$  — главные значения правого тензора искажений. В силу (1.38) из [7], они равны главным значениям левого тензора искажений

$$U_k = V_k. \quad (1.50)$$

Воспользуемся уравнением (1.29)

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{G}} \cdot \left( \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} \right)$$

и запишем его следующим образом

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right) \cdot \mathbf{P} \cdot \left( \mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} \right)^T, \quad (1.51)$$

где  $\mathbf{P}$  — второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа

$$\mathbf{P} = 2 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{G}}. \quad (1.52)$$

Свои вычисления начнем с (1.52). Для этого зададим тензор Коши – Грина его разложением в главном базисе

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^2 = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} U_k^2.$$

Вычислим производную в (1.52) в соответствии с ее определением

$$\mathbf{P} = 2 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{G}} = 2 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \frac{\partial w}{\partial G_{kl}}.$$

Тогда получим

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} 2 \frac{\partial w(T, U_1^2, U_2^2, U_3^2)}{\partial U_k^2}. \quad (1.53)$$

А теперь подставим этот результат в (1.51) и воспользуемся полярным разложением градиента места (1.18) из [7]

$$\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}.$$

Получим

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \cdot \left( \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} 2 \frac{\partial w}{\partial U_k^2} \right) \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{O}^T. \quad (1.54)$$

Используя разложение (1.34) из [7] для правого тензора искажений

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{U(k)} \mathbf{e}_{U(k)} U_k,$$

преобразуем (1.54) к следующему виду

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \sum_{k=1}^3 (\mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_{U(k)}) (\mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_{U(k)}) U_k^2 \frac{\partial w}{\partial U_k^2}.$$

Появившиеся здесь векторы, в силу (1.39) из [7], представляют базисные векторы левого тензора искажений

$$\mathbf{e}_{V(k)} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{e}_{U(k)}.$$

Таким образом, мы пришли к искомой формуле

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_{V(k)} \mathbf{e}_{V(k)} U_k^2 \frac{\partial w}{\partial U_k^2}. \quad (1.55)$$

Отсюда легко находим значения главных напряжений в главном базисе левого тензора искажений

$$\sigma_{kk} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} U_k^2 \frac{\partial w}{\partial U_k^2}, \quad \left( \sum_{/k} \right). \quad (1.56)$$

Эту формулу можно переписать и так

$$\sigma_{kk} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_k \frac{\partial w}{\partial U_k}, \quad \left( \sum_{/k} \right). \quad (1.57)$$

Таким образом, получено еще одно популярное представление тензора напряжений в нелинейной механике.

## 2. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ДЕФОРМИРОВАНИЙ УПРУГОГО ТЕЛА

### 2.1. Простейшие деформации в несжимаемом нелинейно упругом теле

В этой главе будут представлены формулы для вычисления напряжений в упругих телах простейших форм при простейших состояниях деформирования. Зачем нужны эти, вообще говоря, элементарные формулы? Они представляют второй шаг в проблеме идентификации параметров определяющих уравнений упругих материалов. Напомню, что эта проблема обсуждалась в общем виде в разделе 1.3 из [8].

В этой главе будут рассмотрены четыре задачи:

1. Одноосное растяжение цилиндрического стержня со свободной боковой поверхностью.
2. Двухосное изотропное растяжение прямоугольной пластинки со свободными лицевыми поверхностями.
3. Чистый сдвиг прямоугольного параллелепипеда.
4. Трехосное изотропное растяжение прямоугольного параллелепипеда

### 2.2. Одноосное растяжение цилиндра со свободной боковой поверхностью

Полагаем, что цилиндр растягивается вдоль оси  $ox_1$ , причем обозначаем  $U_1$  — искажение вдоль этой оси. Искажения вдоль двух других осей обозначаем  $U_2$  и  $U_3$ , соответственно, и полагаем, что эти искажения равны друг другу, т.е.

$$U_3 = U_2. \quad (2.1)$$

Отношение объемов материального тела после деформации и до деформации определяется формулой (1.68) из [7]

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{|\mathbf{G}|}. \quad (2.2)$$

Учитывая представление меры Коши – Грина в ее главном базисе (1.34) из [7], получаем из (2.2)

$$\frac{dv}{dV} = U_1 U_2 U_3. \quad (2.3)$$

Полагаем, далее, что материал несжимаем, т.е., что

$$U_1 U_2 U_3 = 1. \quad (2.4)$$

Учитывая условие деформирования (2.1), находим

$$U_2 = U_3 = U_1^{-\frac{1}{2}}.$$

При таком состоянии деформации первый и второй главные инварианты принимают следующие значения

$$I_1 = U_1^2 + 2U_1^{-1},$$

$$I_2 = U_1^2 (U_2^2 + U_3^2) + U_2^2 U_3^2 = 2U_1 + U_1^{-2}.$$

Подставляя значения главных искажений в (1.49), получим

$$\sigma_{11} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} U_1^2 - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} U_1^{-2}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} U_1^{-1} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} U_1.$$

Из выражений (2.5) следует, что напряженное состояние однородно во всем растягиваемом цилиндре. Поскольку боковая поверхность цилиндра свободна, во всем цилиндре должно быть

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0,$$

т.е.

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} U_1^{-1} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} U_1 = 0.$$

С помощью последнего уравнения мы можем определить неизвестную величину  $p$  и исключить ее из первого уравнения (2.5). Это приводит к следующему выражению напряжения, действующего вдоль оси растяжения

$$\sigma_{11} = 2 \left( U_1^2 - U_1^{-1} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} + U_1^{-1} \frac{\partial w}{\partial I_2} \right). \quad (2.6)$$

### 2.3. Двухосное изотропное растяжение пластинки со свободными лицевыми поверхностями

Полагаем, что пластинка расположена так, что растяжение ее происходит в плоскости  $x_1ox_2$ , причем искажения в обоих направлениях равны, т.е.

$$U_1 = U_2. \quad (2.7)$$

Искажение  $U_3$  вдоль третьей оси находим из условия несжимаемости материала

$$U_1U_2U_3 = 1,$$

так что получаем

$$U_3 = U_1^{-2}.$$

Значения главных инвариантов меры деформации Коши – Грина оказываются такими

$$I_1 = 2U_1^2 + U_1^{-4},$$

$$I_2 = U_1^2U_2^2 + U_3^2(U_1^2 + U_2^2) = U_1^4 + 2U_1^{-2}.$$

Подставляя значения главных искажений в (1.49), получим

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} U_1^2 - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} U_1^{-2}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{33} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} U_1^{-4} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} U_1^4 = 0. \quad (2.9)$$

Последнее уравнение отражает тот факт, что лицевая поверхность  $x_3 = const$  свободна от напряжений, т.е.  $\sigma_{33} = 0$ . Вычитая правые и левые части уравнения (2.9) из соответствующих частей уравнения (2.8), получим следующее представление действующего напряжения

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2(U_1^2 - U_1^{-4}) \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} + U_1^2 \frac{\partial w}{\partial I_2} \right). \quad (2.10)$$

Из (2.10) видно, что действующие напряжения постоянны в пределах всей пластинки.

## 2.4. Чистый сдвиг

Полагаем, что в направлении оси  $ox_2$  деформирование отсутствует вообще. А это означает, что

$$U_2 = 1. \quad (2.11)$$

Полагаем далее, что искажение вдоль оси  $ox_3$  обратно искажению в направлении оси  $ox_1$ , т.е.

$$U_3 = U_1^{-1}. \quad (2.12)$$

Главные инварианты меры деформации Коши – Грина имеют следующие значения, в полном соответствии с (2.11) и (2.12)

$$I_1 = U_1^2 + U_1^{-2} + 1,$$

$$I_2 = U_1^2 + U_1^{-2} + 1.$$

Далее, для главных напряжений получаем следующие выражения

$$\sigma_{11} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} U_1^2 - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} U_1^{-2}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{22} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{33} = -p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} U_1^{-2} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} U_1^2. \quad (2.15)$$

Ни одно из этих напряжений не равно нулю, так что в этом случае не удастся исключить неизвестную величину  $p$  так, как это делалось раньше.

Воспользуемся тем, что характер деформирования подсказывает, что если в направлении оси  $ox_1$  происходит растяжение, то это значит, что в направлении этой оси будет действовать растягивающее напряжение некоторой величины; ну, а если вдоль оси  $ox_3$  происходит сжатие той же интенсивности, то это означает, что в направлении этой оси действует сжимающее напряжение той же величины. Так что, можем положить

$$\sigma_{33} = -\sigma_{11}$$

или

$$\sigma_{33} + \sigma_{11} = 0. \quad (2.16)$$

Подставляя сюда напряжения по формулам (2.13) и (2.15), получим уравнение для определения  $p$



$$-2p + 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} (U_1^2 + U_1^{-2}) - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} (U_1^2 + U_1^{-2}) = 0.$$

Отсюда находим

$$p = \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} - \frac{\partial w}{\partial I_2} \right) (U_1^2 + U_1^{-2}).$$

Подставив это значение  $p$  в (2.13) и (2.14), приходим к следующим представлениям действующих напряжений

$$\sigma_{11} = (U_1^2 - U_1^{-2}) \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} + \frac{\partial w}{\partial I_2} \right), \quad (2.17)$$

$$\sigma_{22} = (2 - U_1^2 - U_1^{-2}) \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} - \frac{\partial w}{\partial I_2} \right). \quad (2.18)$$

Оказалось, что в направлении, перпендикулярном плоскости сдвига тоже действует напряжение!

Остается убедиться в том, что сконструированное состояние деформации представляет действительно сдвиг: ведь при его конструировании мы оперировали только растяжениями и сжатиями. Снова рассмотрим состояние деформирования, определяемое формулами (2.11), (2.12). При таком деформировании текущая координата некоторой типичной материальной точки определяется следующим образом

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 U_1 \overset{\circ}{x}_1 + \mathbf{i}_2 \overset{\circ}{x}_2 + \mathbf{i}_3 U_1^{-1} \overset{\circ}{x}_3, \quad (2.19)$$

где  $\overset{\circ}{x}_1$ ,  $\overset{\circ}{x}_2$  и  $\overset{\circ}{x}_3$  — координаты начального положения этой точки

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}_1 \overset{\circ}{x}_1 + \mathbf{i}_2 \overset{\circ}{x}_2 + \mathbf{i}_3 \overset{\circ}{x}_3.$$

Вычислим градиент деформации или, точнее, градиент места

$$\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 U_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 U_1^{-1} \quad (2.20)$$

и воспользуемся полярным разложением (1.18) из [7]

$$\mathbf{r} \overset{\circ}{\nabla} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}. \quad (2.21)$$

Из двух последних уравнений (2.20) и (2.21) видно, что рассмотренному состоянию деформирования соответствуют следующие значения тензора поворота и тензоров искажений

$$\mathbf{O} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 U_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 U_1^{-1}.$$

Тензор деформации Генки имеет значение

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{U} = (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3) \ln U_1. \quad (2.22)$$

В плоскости  $x_1 o x_3$  введем новые орты, направленные под углом  $45^\circ$  к ортам  $\mathbf{i}_1$  и  $\mathbf{i}_3$ . Используем, например, следующие представления

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_3).$$

Обратные представления имеют вид

$$\mathbf{i}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{i}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3). \quad (2.23)$$

Подставив эти представления в формулу Генки, получим

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}((\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)) \ln U_1.$$

После простых преобразований приходим к следующему результату

$$\mathbf{H} = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) \ln U_1. \quad (2.24)$$

В этом выражении тензора Генки диагональные элементы вообще отсутствуют. Имеются только недиагональные элементы. Но они ответственны за сдвиг! Так что, (2.24) описывает сдвиг в повернутой координатной системе с ортами  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ .

Таким образом, выражение тензора Генки (2.24) оправдывает название деформированного состояния: чистый сдвиг.

## 2.5. Трехосное равномерное растяжение

Рассматриваем такое состояние деформирования, при котором происходит одинаковое растяжение вдоль всех трех осей координат. Это означает, что искажения равны

$$U_1 = U_2 = U_3.$$

В этом случае главные инварианты меры деформации Коши – Грина оказываются равными следующим величинам

$$I_1 = 3U_1^2, \quad I_2 = 3U_1^4, \quad I_3 = U_1^6.$$

Напряжения находим по формуле (1.47)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{2}{U_1^3} \left( U_1^6 \frac{\partial w}{\partial I_3} + U_1^2 \frac{\partial w}{\partial I_1} - \frac{\partial w}{\partial I_2} (U_1^4 - 3U_1^4) \right).$$

После упрощений получаем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{2}{U_1} \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} + 2U_1^2 \frac{\partial w}{\partial I_2} + U_1^4 \frac{\partial w}{\partial I_3} \right). \quad (2.25)$$

С некоторым удивлением обнаруживаем, что напряжение зависит не только от  $I_3$ , но и от всех остальных инвариантов:  $I_1$  и  $I_2$ .

### 3. ПРИМЕРЫ ПОТЕНЦИАЛОВ, НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

#### 3.1. Простейшее обобщение потенциала линейной теории упругости — потенциал Джона

В линейной теории упругости потенциальная энергия деформации принимается равной однородной квадратичной функции координат тензора малой деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , а именно

$$w = \frac{\lambda}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{E})^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.1)$$

Положим, что тензор малой деформации связан с тензором искажений следующим образом

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{U} - \mathbf{E} \quad (3.2)$$

и тогда получим из (3.1) следующее выражение потенциала упругости

$$w = \frac{\lambda}{2} \left( (U_1 - 1) + (U_2 - 1) + (U_3 - 1) \right)^2 + \mu \left( (U_1 - 1)^2 + (U_2 - 1)^2 + (U_3 - 1)^2 \right). \quad (3.3)$$

Итак, оказалось, что потенциальная энергия представлена, как функция главных искажений. Поэтому напряжения следует вычислять по формуле (1.57). Это приводит к следующим результатам

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_1 \left( \lambda (U_1 + U_2 + U_3 - 3) + 2\mu (U_1 - 1) \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_2 \left( \lambda (U_1 + U_2 + U_3 - 3) + 2\mu (U_2 - 1) \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_3 \left( \lambda (U_1 + U_2 + U_3 - 3) + 2\mu (U_3 - 1) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим различные состояния деформации.

##### *1. Одноосное растяжение*

Следуя рассуждениям раздела 2.2, полагаем (см. (2.1) и др.)

$$\begin{aligned} U_2 &= U_3, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33} = 0 \end{aligned}$$

и, в конце концов, получаем следующее представление напряжений

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_1 (\lambda(U_1 - 1) + 2\lambda(U_2 - 1) + 2\mu(U_1 - 1)), \quad (3.5)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_2 (\lambda(U_1 - 1) + 2\lambda(U_2 - 1) + 2\mu(U_2 - 1)) = 0. \quad (3.6)$$

Обращаю внимание читателя на то, что принятые условия деформирования освобождает нас от принятия требования о несжимаемости материала, которое было решающим в гл. 2.

Из второго уравнения легко находим следующее значение  $(U_2 - 1)$

$$U_2 - 1 = -\frac{\lambda(U_1 - 1)}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.7)$$

Это выражение должно быть подставлено в (3.5). Однако, прежде чем делать это, запишем второе уравнение (3.6) в следующей, слегка измененной форме

$$0 = \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_1 (\lambda(U_1 - 1) + 2\lambda(U_2 - 1) + 2\mu(U_2 - 1)).$$

Вычитая правую и левую части этого уравнения из соответствующих частей уравнения (3.5) для первого главного напряжения, получим его упрощенное выражение

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} 2\mu U_1 ((U_1 - 1) - (U_2 - 1)).$$

И вот теперь уже можно подставить сюда  $(U_2 - 1)$  по (3.7). Получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2\mu}{\sqrt{I_3}} U_1 (U_1 - 1) \left( 1 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right) = \\ &= \frac{2\mu}{\sqrt{I_3}} U_1 (U_1 - 1) \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В линейной теории упругости показано, что модуль упругости Ламе следующим образом выражается через модуль сдвига и коэффициент Пуассона

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}. \quad (3.9)$$

Использование его позволяет вычислить коэффициент, входящий в (3.8), и это дает следующее выражение для действующего напряжения

$$\sigma_{11} = 2\mu(1+\nu) \frac{U_1(U_1-1)}{\sqrt{I_3}}. \quad (3.10)$$

Появившийся здесь коэффициент равен модулю Юнга

$$E = 2\mu(1+\nu), \quad (3.11)$$

так что выражение для напряжения еще более упрощается и принимает следующий простой вид

$$\sigma_{11} = \frac{EU_1(U_1-1)}{\sqrt{I_3}}. \quad (3.12)$$

Остается вычислить  $I_3$ . По определению имеем

$$\sqrt{I_3} = U_1 U_2 U_3,$$

что с учетом (2.1) и (3.7) приводит к следующему выражению

$$\sqrt{I_3} = U_1 U_2^2 = U_1 \left( 1 - \frac{\lambda(U_1-1)}{2(\lambda+\mu)} \right)^2.$$

Это выражение можно упростить, используя (3.9). Результат этого упрощения таков

$$\sqrt{I_3} = U_1 (1 - \nu(U_1-1))^2. \quad (3.13)$$

Внося его в (3.12), получим окончательно

$$\sigma_{11} = \frac{E(U_1-1)}{(1-\nu(U_1-1))^2}. \quad (3.14)$$

Проведем элементарный анализ этой формулы. Во-первых, полагая

$$U_1 = 1 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — малая деформация, и вычисляя асимптотическое значение в (3.14), получим

$$\sigma_{11} = E\varepsilon.$$

Именно такие значения напряжения дает линейная теория упругости в задаче об одноосном растяжении цилиндрического стержня. Это положительный факт.

Обратим внимание на второе свойство выражения (3.14): оно дает неограниченно большие значения для напряжения еще при конечных значениях искажения  $U_1$ , а именно при значении

$$(U_1 - 1) = \nu^{-1}. \quad (3.15)$$

Это свойство напряжения вызывает тревогу. Ведь дальнейшее деформирование невозможно.

Обращаю внимание читателя на то, что в силу (3.7) размер поперечного сечения цилиндрического стержня уменьшается. А что будет с полной силой  $P$ , вызывающей растяжение стержня? Ее найдем по следующей формуле

$$P = \sigma_{11} U_2^2. \quad (3.16)$$

Конечно, это тоже напряжение, но только напряжение, отнесенное к единице площади начального поперечного сечения. Вычисления дают идеально простой результат

$$P = E(U_1 - 1).$$

Итак, напряжение Коши возрастает неограниченно еще при конечной деформации (3.15), тогда как полное усилие, вызывающее растяжение стержня с площадью начального сечения, равной единице, таким негативным свойством не обладает!

## *2. Двухосное изотропное растяжение пластинки со свободной лицевой поверхностью*

По формулам (2.7) и (2.9) находим

$$U_1 = U_2, \quad \sigma_{33} = 0.$$

Опять обращаю внимание читателя на то, что требование несжимаемости не используется.

С учетом этих условий с помощью общих представлений напряжений получаем

$$\sigma_{22} = \sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_1 (2\lambda(U_1 - 1) + \lambda(U_3 - 1) + 2\mu(U_1 - 1)),$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_3 (2\lambda(U_1 - 1) + \lambda(U_3 - 1) + 2\mu(U_3 - 1)) = 0.$$

Из второго уравнения находим

$$2\lambda(U_1 - 1) + \lambda(U_3 - 1) + 2\mu(U_3 - 1) = 0.$$

С помощью этого равенства, во-первых упрощаем представление  $\sigma_{11}$  и получаем

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu U_1}{\sqrt{I_3}} ((U_1 - 1) - (U_3 - 1)) \quad (3.17)$$

и, во-вторых, находим искажение  $U_3$  по формуле

$$U_3 - 1 = -\frac{2\lambda(U_1 - 1)}{\lambda + 2\mu}.$$

Внося это значение искажения  $U_3$  в (3.17), получим

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu U_1 (U_1 - 1)}{\sqrt{I_3}} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \right).$$

Упрощая это результат с помощью (3.9), находим

$$\sigma_{11} = \frac{EU_1(U_1 - 1)}{\sqrt{I_3}(1 - \nu)}. \quad (3.18)$$

Наконец, вычислим  $\sqrt{I_3}$ . Результат таков

$$\begin{aligned} \sqrt{I_3} &= U_1^2 U_3 = U_1^2 \left( 1 - \frac{2\lambda(U_1 - 1)}{\lambda + 2\mu} \right) = \\ &= U_1^2 \left( 1 - \frac{2\nu}{1 - \nu}(U_1 - 1) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя его в (3.18), приходим к следующему значению действующего напряжения

$$\sigma_{11} = \frac{E(U_1 - 1)}{U_1(1 - \nu) \left( 1 - \frac{2\nu}{1 - \nu}(U_1 - 1) \right)}. \quad (3.20)$$

Проведем анализ этого выражения.

Во-первых, полагая

$$U_1 = 1 + \varepsilon,$$

получим следующее асимптотическое представление напряжения при малом  $\varepsilon$

$$\sigma_{11} = \frac{E\varepsilon}{1 - \nu}.$$

Именно такое значение дает линейная теория упругости. Это хорошо.

Второе, на что следует обратить внимание, это то, что напряжение (3.20) может принять неограниченно большое значение при еще конечной деформации, а именно при



$$U_1 - 1 = \frac{1 - \nu}{2\nu}.$$

Это негативный факт. Однако легко увидеть, что при этом значении искажение  $U_3$  оказывается равным нулю, т.е. толщина пластинки стремится к нулю. Опять дальнейшее деформирование невозможно! А к чему же стремится полное усилие, отнесенное к единице площади нагруженной грани в начальном состоянии?

Легко сообразить, что оно равно

$$P = \sigma_{11} U_1 U_3$$

или

$$P = \frac{E(U_1 - 1)}{(1 - \nu)}.$$

Это напряжение остается ограниченным. Это тоже настораживает!

### 3. Чистый сдвиг

Примем, как и ранее, условия деформирования, сформулированные равенствами (2.11), (2.12) и (2.16)

$$U_2 = 1, \quad U_3 = U_1^{-1}, \quad \sigma_{11} + \sigma_{33} = 0. \quad (3.21)$$

Обращаю внимание читателя на то, что условие несжимаемости здесь активно используется, поскольку

$$I_3 = 1.$$

Напряжения выражаем по формуле (1.57) и, в конце концов, получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= U_1 \left( \lambda (U_1 - 1 + U_1^{-1} - 1) + 2\mu (U_1 - 1) \right), \\ \sigma_{22} &= \lambda (U_1 - 1 + U_1^{-1} - 1), \\ \sigma_{33} &= U_1^{-1} \left( \lambda (U_1 - 1 + U_1^{-1} - 1) + 2\mu (U_1^{-1} - 1) \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Подставив эти представления в силовое условие (3.21), получим уравнение

$$\begin{aligned} &\lambda (U_1 (U_1 - 1) + 1 - U_1 + U_1^{-1} (U_1 - 1) + U_1^{-2} (1 - U_1)) + \\ &+ 2\mu (U_1 (U_1 - 1) + U_1^{-2} (1 - U_1)) = 0. \end{aligned}$$

Уже видно, что в левой части выделился множитель  $(U_1 - 1)$ , так что левая часть преобразуется к виду

$$(U_1 - 1) \left( \lambda (1 + U_1^{-2}) (U_1 - 1) + 2\mu U_1^{-2} (U_1^3 - 1) \right) = 0.$$

Легко увидеть, что в левой части выделяется еще один множитель  $(U_1 - 1)$ , так что левая часть принимает вид

$$(U_1 - 1)^2 \left( \lambda (1 + U_1^{-2}) + 2\mu U_1^{-2} (U_1^2 + U_1 + 1) \right) = 0.$$

К странному выводу мы приходим, разглядывая это уравнение: его решением является условие

$$U_1 = 1.$$

А это означает, что предписанные равенствами (3.21) условия слишком жесткие. Выше рассматривалось, что кинематические условия деформирования таковы, что выполняется условие несжимаемости

$$U_1 U_2 U_3 = \sqrt{I_3} = 1.$$

В то же время, материал Джона — это материал сжимаемый. В этом вероятная причина появившегося парадокса. Что же делать? Изменим кинематическое условие деформирования так, чтобы допускалась сжимаемость. Отбросим первое ограничение и, в результате, заменим условия (3.21) на следующие условия

$$U_3 = U_1^{-1}, \quad \sigma_{33} + \sigma_{11} = 0. \quad (3.23)$$

Как видно, теперь уже  $U_2 \neq 1$ .

Используя новые условия деформирования (3.23), найдем напряжения по формуле (1.57). Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_1 \left( \lambda (U_1 - 1 + U_1^{-1} - 1 + U_2 - 1) + 2\mu (U_1 - 1) \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_2 \left( \lambda (U_1 - 1 + U_1^{-1} - 1 + U_2 - 1) + 2\mu (U_2 - 1) \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} U_1^{-1} \left( \lambda (U_1 - 1 + U_1^{-1} - 1 + U_2 - 1) + 2\mu (U_3 - 1) \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Подставив эти значения в силовое условие (3.23), получим уравнение

$$(U_1 - 1)^2 \left( \lambda (1 - U_1^{-2}) + 2\mu U_1^{-2} (U_1^2 + U_1 + 1) \right) + \lambda (U_1 + U_1^{-1}) (U_2 - 1) = 0.$$

Из него находим искажение в направлении второй оси — оси перпендикулярной плоскости сдвига

$$U_2 - 1 = -\frac{(U_1 - 1)^2}{(U_1 + U_1^{-1})} \left( 1 + U_1^{-2} + \frac{2\mu}{\lambda} (1 + U_1^{-1} + U_1^{-2}) \right). \quad (3.25)$$

Подставив эти значения в (3.24), получим

$$\sigma_{11} = 2\mu \frac{U_1(U_1 - 1)}{U_2(U_1 + U_1^{-1})} (U_1^{-1} + U_1^{-2}), \quad (3.26)$$

$$\sigma_{22} = -2\mu \frac{(U_1 - 1)^2}{U_1 + U_1^{-1}} \left( (2 + U_1^{-1} + 2U_1^{-2}) + \frac{2\mu}{\lambda} (1 + U_1^{-1} + U_1^{-2}) \right). \quad (3.27)$$

Проведем анализ полученных выражений.

Первое, на что следует обратить внимание — это то, что чистый сдвиг в материале Джона сопровождается сжатием в плоскости, перпендикулярной плоскости сдвига. Второе, на что следует обратить внимание — это то, что выражение напряжения  $\sigma_{11}$  содержит в знаменателе величину  $U_2$ , которая в силу (3.25) имеет выражение

$$U_2 = 1 - \frac{(U_1 - 1)^2}{U_1 + U_1^{-1}} \left( 1 + U_1^{-2} + \frac{2\mu}{\lambda} (1 + U_1^{-1} + U_1^{-2}) \right).$$

Последняя может обратиться в нуль при некотором конечном значении искажения  $U_1$ . Следовательно, при этом значении искажения напряжение  $\sigma_{11}$  обращается в бесконечность.

Наконец, положим

$$U_1 = 1 + \varepsilon$$

и вычислим асимптотическое разложение напряжения  $\sigma_{11}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Получим

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon.$$

Таким образом,  $\mu$  представляет собой модуль сдвига при малой деформации. Это хорошо! А плохо то, что этот материал обнаруживает парадоксальное поведение при конечных удлинениях.

### 3.2. Модифицированная мера деформации Коши – Грина

При записи потенциалов упругости часто используется модифицированная мера деформации Коши – Грина.

Основу последующих рассуждений составляет формула (2.2), дающая представление отношения объемов некоторого элементарного параллелепипеда после деформации и до нее

$$\frac{dv}{dV} = \sqrt{|\mathbf{G}|}.$$

С помощью уравнения (2.3) находим

$$\frac{dv}{dV} = U_1 U_2 U_3 = J. \quad (3.28)$$

Рассмотрим теперь тождество

$$\mathbf{G} = J^{\frac{2}{3}} \mathbf{E} \cdot J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{G}. \quad (3.29)$$

Это мультипликативное разложение меры деформации Коши – Грина. В нем появилось два тензора:

$$\mathbf{G}_v = J^{\frac{2}{3}} \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{G}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{G}. \quad (3.30)$$

Определитель первого тензора равен следующей величине

$$|\mathbf{G}_v| = J^2.$$

Он представляет составляющую меры деформации Коши – Грина, связанную только с изменением объема при деформации.

Легко увидеть, что определитель второго тензора в (3.29) равен единице. Действительно,

$$|\bar{\mathbf{G}}| = J^{-2} |\mathbf{G}| = J^{-2} J^2 = 1. \quad (3.31)$$

Он оказался вообще нечувствительным к изменению объема. Значит, он определяет все, за исключением объема. А что остается? Конечно форма! Значит, тензор  $\bar{\mathbf{G}}$  определяет изменение формы малой окрестности некоторой материальной точки. Поэтому он называется мерой деформации формоизменения. Называют его также модифицированной мерой деформации Коши – Грина.

Характеристическое уравнение

$$|\bar{\mathbf{G}} - \bar{U}_p^2 \mathbf{E}| = 0 \quad (3.32)$$

определяет главные значения модифицированной меры деформации Коши – Грина.

Как связаны эти величины с главными значениями  $\mathbf{G}$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, подставим представление (3.30) в его характеристическое уравнение (3.32). Получим следующее уравнение

$$\left| J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{G} - \bar{U}_p^2 \mathbf{E} \right| = 0.$$

Умножая все строчки определителя, стоящего в левой части на  $J^{\frac{2}{3}}$ , получим

$$\left| \mathbf{G} - \bar{U}_p^2 J^{\frac{2}{3}} \mathbf{E} \right| = 0. \quad (3.33)$$

Здесь получилось характеристическое уравнение (1.117) из [6] для меры деформации Коши – Грина. Но в силу соотношений (1.41) из [7] они равны  $U_p^2$ . Следовательно, получаем

$$U_p^2 = \bar{U}_p^2 J^{\frac{2}{3}}$$

или

$$\bar{U}_p^2 = J^{-\frac{2}{3}} U_p^2. \quad (3.34)$$

Соответствующие главные искажения связаны уравнением

$$\bar{U}_p = J^{-\frac{1}{3}} U_p. \quad (3.35)$$

Главные инварианты характеристического уравнения для  $\mathbf{G}$  найдем по аналогии с (1.141) и (1.142) из [6]

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2 + \bar{U}_3^2, \\ \bar{I}_2 &= \bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2 + \bar{U}_2^2 \bar{U}_3^2 + \bar{U}_1^2 \bar{U}_3^2, \\ \bar{I}_3 &= \bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2 \bar{U}_3^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Подставив сюда представление  $\bar{U}_p^2$  по (3.34), получим

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= J^{-\frac{2}{3}} I_1, \\ \bar{I}_2 &= J^{-\frac{4}{3}} I_2, \\ \bar{I}_3 &= J^{-\frac{6}{3}} I_3 = 1. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Таким образом, инварианты модифицированной меры деформации не содержат полной информации о мере деформации Коши – Грина. Ее содержит комбинация:  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ ,  $J$ . Поэтому рационально записывать потенциал упругости в функции этих аргументов, т.е.

$$w = w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J). \quad (3.38)$$

Более того, во многих случаях оказывается рациональным представлять  $w$  в виде суммы двух слагаемых

$$w = w_1 + w_2, \quad (3.39)$$

в которой первое слагаемое является потенциальной энергией формоизменения, т.е.

$$w_1 = w_1(\bar{I}_1, \bar{I}_2), \quad (3.40)$$

а второе — потенциальной энергией объемной деформации, т.е.

$$w_2 = w_2(J).$$

Примеры таких представлений приводятся ниже.

### 3.3. Группа потенциалов Муни – Ривлина

#### 1. Нео-гуков потенциал

Это простейший из потенциалов группы, он имеет вид

$$w = \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3.41)$$

Этот потенциал называют также потенциалом Муни или потенциалом Трелоара. Он обычно используется в сочетании с условием несжимаемости  $J \rightarrow 1$ .

Рассмотрим последовательно одноосное растяжение цилиндрического стержня, двухосное растяжение пластинки и, наконец, чистый сдвиг.

#### 1. Одноосное растяжение цилиндрического стержня

Имеем по уравнению (2.6) следующее выражение напряжения

$$\sigma_{11} = 2(U_1^2 - U_1^{-1}) \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{I}_1} + U_1^{-1} \frac{\partial w}{\partial \bar{I}_2} \right).$$

Обращаю внимание читателя на то, что условие несжимаемости ( $J = 1$ ) уже учтено.

Но в силу (3.41) имеем

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\mu}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial \bar{I}_2} = 0$$

и тогда получаем следующее значение напряжения

$$\sigma_{11} = \mu(U_1^2 - U_1^{-1}). \quad (3.42)$$

Если положить

$$U_1 = 1 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — деформация, то получим следующее асимптотическое представление напряжения при малой деформации

$$\sigma_{11} = \mu(1 + 2\varepsilon - (1 - \varepsilon)) = 3\mu\varepsilon.$$

Сравним это значение с тем, что получилось бы по линейной теории упругости, т.е.

$$\sigma_{11} = E\varepsilon, \quad (3.43)$$

причем  $E$  — модуль Юнга

$$E = 2\mu(1 + \nu), \quad (3.44)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Если учесть теперь, что материал несжимаемый, то  $\nu = \frac{1}{2}$ , и тогда получим из (3.44)

$$E = 2\mu\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3\mu.$$

По (3.43) находим значение напряжения

$$\sigma_{11} = 3\mu\varepsilon.$$

Точно такое же значение напряжения получено и в нашем анализе.

Осталось показать, что  $\mu$  в (3.41) имеет смысл модуля сдвига. Это будет сделано ниже.

*2. Двухосное изотропное растяжение пластины со свободными лицевыми поверхностями*

По формуле (2.10) имеем следующее выражение напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2(U_1^2 - U_1^{-4})\left(\frac{\partial w}{\partial I_1} + U_1^2 \frac{\partial w}{\partial I_2}\right).$$

Учитывая (3.41), находим

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \mu(U_1^2 - U_1^{-4}).$$

*3. Чистый сдвиг*

Имеем по (2.17) и (2.18)

$$\sigma_{11} = (U_1^2 - U_1^{-2})\left(\frac{\partial w}{\partial I_1} + \frac{\partial w}{\partial I_2}\right) = \frac{\mu}{2}(U_1^2 - U_1^{-2}),$$

$$\sigma_{22} = (2 - U_1^2 - U_1^{-2})\left(\frac{\partial w}{\partial I_1} - \frac{\partial w}{\partial I_2}\right) = \frac{\mu}{2}(2 - U_1^2 - U_1^{-2}).$$

Если опять положить

$$U_1 = 1 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — деформация, то получим следующие асимптотические разложения напряжений при малых деформациях

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\mu}{2}(1 + 2\varepsilon + (1 + 2\varepsilon)) = 2\mu\varepsilon, \\ \sigma_{22} &= 0.\end{aligned}$$

Первое из этих уравнений демонстрирует, что  $\mu$  — действительно модуль сдвига.

## II. Потенциал Муни – Ривлина

Двухпараметрический потенциал Муни – Ривлина имеет написание

$$w = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3.45)$$

Имеем для несжимаемого материала

$$\frac{\partial w}{\partial I_1} = C_{10}, \quad \frac{\partial w}{\partial I_2} = C_{01}.$$

### 1. Одноосное растяжение

Имеем по (2.6) следующее представление напряжения

$$\sigma_{11} = 2(C_{10} + U_1^{-1}C_{01})(U_1^2 - U_1^{-1}). \quad (3.46)$$

### 2. Двухосное изотропное растяжение

По (2.10) находим

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2(C_{10} + U_1^2C_{01})(U_1^2 - U_1^{-4}). \quad (3.47)$$

### 3. Чистый сдвиг

По (2.17), (2.18) находим

$$\sigma_{11} = (C_{10} + C_{01})(U_1^2 - U_1^{-2}), \quad (3.48)$$

$$\sigma_{22} = (C_{10} - C_{01})(2 - U_1^2 - U_1^{-2}). \quad (3.49)$$

## III. Обобщения потенциалов Муни – Ривлина

Они имеют некоторое распространение в механике деформируемых тел.

Потенциал Муни – Ривлина с тремя параметрами имеет следующий вид

$$w = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3.50)$$



Потенциал Муни – Ривлина с пятью параметрами записывается следующим образом

$$w = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3.51)$$

Приводим, далее, представление потенциала Муни – Ривлина с девятью параметрами

$$w = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + C_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + C_{12}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3 + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3.52)$$

Естественным обобщением приведенных вариантов представления потенциалов Муни – Ривлина является, так называемая, форма Муни – Ривлина. Приводим ее

$$w = \sum_{i+j=1}^N C_{ij}(\bar{I}_1 - 3)^i(\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k}(J - 1)^{2k}. \quad (3.53)$$

Чем больше число  $N$  в этих рядах, тем лучше удастся приблизить теоретическую зависимость напряжений от деформации, полученную по формуле (3.53), к экспериментальной зависимости. Однако, чем больше  $N$ , тем сложнее вычисления параметров, входящих в (3.53). Естественно, что брать слишком большие значения  $N$  не рекомендуется.

Возникает естественный вопрос: почему во всех приведенных выше разложениях используются комбинации  $(\bar{I}_1 - 3)$  и  $(\bar{I}_2 - 3)$ ? Ответ таков: потому что 3 — это минимальное значение и  $\bar{I}_1$ , и  $\bar{I}_2$  при условии  $\bar{I}_3 = 1$ .

Докажем это.

Для этого воспользуемся представлением (3.36)

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2 + \bar{U}_3^2, \\ \bar{I}_2 &= \bar{U}_1^2\bar{U}_2^2 + \bar{U}_2^2\bar{U}_3^2 + \bar{U}_1^2\bar{U}_3^2, \\ \bar{I}_3 &= \bar{U}_1^2\bar{U}_2^2\bar{U}_3^2, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где  $\bar{U}_1^2$ ,  $\bar{U}_2^2$  и  $\bar{U}_3^2$  — главные значения модифицированной меры деформации Коши – Грина  $\bar{\mathbf{G}}$ , определяемой второй формулой (3.30). Из третьего уравнения (3.37) находим, что  $\bar{I}_3 = 1$ , и это дает следующее условие

$$\bar{I}_3 = \bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2 \bar{U}_3^2 = 1. \quad (3.55)$$

Напоминаю читателю, что модифицированная мера деформации Коши – Грина описывает любые деформации формоизменения, т.е. деформации, проходящие без изменения объема. Условие (3.55), как раз, и отражает этот факт. Воспользуемся этим условием и выразим  $\bar{U}_3^2$ . Получим следующее ограничение

$$\bar{U}_3^2 = \frac{1}{\bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2}. \quad (3.56)$$

Если подставить представление (3.56) в первое уравнение (3.54), то получим следующее представление  $\bar{I}_1$ :

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2 + \frac{1}{\bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2}. \quad (3.57)$$

Найдем минимальное значение функции (3.57). Условия стационарности этой функции, рассматриваемой как функция двух переменных  $\bar{U}_1^2$  и  $\bar{U}_2^2$  дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{U}_1^2} &= 1 - \frac{1}{\bar{U}_1^4 \bar{U}_2^2} = 0, \\ \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{U}_2^2} &= 1 - \frac{1}{\bar{U}_1^2 \bar{U}_2^4} = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Из первого полученного уравнения находим

$$\bar{U}_1^4 \bar{U}_2^2 = 1$$

или

$$\bar{U}_2^2 = \frac{1}{\bar{U}_1^4}. \quad (3.59)$$

Подставив это значение во второе уравнение (3.58), приходим к следующему уравнению для определения  $\bar{U}_1^2$

$$1 - \bar{U}_1^6 = 0.$$

Это дает, в сочетании с (3.59), следующие результаты

$$\bar{U}_1^2 = 1, \quad \bar{U}_2^2 = 1. \quad (3.60)$$

При этих значениях аргументов первый инвариант модифицированной меры деформации Коши – Грина принимает следующее значение

$$\bar{I}_1 = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (3.61)$$

Итак, мы нашли единственную комбинацию аргументов  $\bar{U}_1^2$  и  $\bar{U}_2^2$ , а именно, комбинацию (3.60), при которой функция (3.57) имеет стационарное значение, и это стационарное значение равно 3, в полном соответствии с (3.61). Остается выяснить, что это такое: максимум, минимум или седловая точка. Воспользуемся методом разложения функции (3.57) в окрестности ее стационарного значения. Для этого положим

$$\bar{U}_1^2 = 1 + \varepsilon_1, \quad \bar{U}_2^2 = 1 + \varepsilon_2.$$

Тогда получим следующее представление функции (3.57)

$$\bar{I}_1 = 1 + \varepsilon_1 + 1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \frac{1}{1 + \varepsilon_2}. \quad (3.62)$$

Полагая  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  малыми, разложим (3.62) в ряд по степеням  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . При этом воспользуемся известными формулами для сумм геометрических прогрессий со знаменателями  $-\varepsilon_1$  и  $-\varepsilon_2$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_1} = 1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1^3 + \varepsilon_1^4 - \dots,$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_2} = 1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2^3 + \varepsilon_2^4 - \dots$$

Подставив эти разложения в (3.62), и удерживая все члены до второго порядка малости, получим

$$\bar{I}_1 = 1 + \varepsilon_1 + 1 + \varepsilon_2 + (1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2)(1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2) = 3 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Здесь появилась знакоопределенная положительная квадратичная форма, ибо она имеет все положительные коэффициенты, и ее определитель имеет значение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} > 0.$$

Так что, условия Сильвестра выполнены.

Итак, функция  $\bar{I}_1$ , определяемая уравнением (3.57), имеет минимум в точке  $\bar{U}_1^2 = 1$ ,  $\bar{U}_2^2 = 1$ , и значит, разность  $\bar{I}_1 - 3$  всегда положительна.

Переходим к рассмотрению второго инварианта модифицированной меры деформации Коши – Грина. По (3.54) он имеет представление

$$\bar{I}_2 = \bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2 + \bar{U}_2^2 \bar{U}_3^2 + \bar{U}_1^2 \bar{U}_3^2.$$

Разделим обе части этого равенства на произведение  $\bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2 \bar{U}_3^2$ , которое в силу (3.55) равно единице. Тогда получим

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{\bar{U}_3^2} + \frac{1}{\bar{U}_1^2} + \frac{1}{\bar{U}_2^2}. \quad (3.63)$$

Следует иметь в виду, что модифицированные главные искажения  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{U}_2$  и  $\bar{U}_3$  связаны соотношением (3.55) или, в обращенной форме,

$$\frac{1}{\bar{U}_1^2} \frac{1}{\bar{U}_2^2} \frac{1}{\bar{U}_3^2} = 1. \quad (3.64)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{\bar{U}_1^2} = V_1^2, \quad \frac{1}{\bar{U}_2^2} = V_2^2, \quad \frac{1}{\bar{U}_3^2} = V_3^2. \quad (3.65)$$

Тогда второй инвариант  $\bar{I}_2$  примет выражение

$$\bar{I}_2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2, \quad (3.66)$$

а ограничение (3.64) примет следующий вид

$$V_1^2 V_2^2 V_3^2 = 1.$$

Если выразить отсюда  $V_3^2$  и подставить в (3.66), то получим следующее представление второго инварианта модифицированной меры деформации Коши – Грина

$$\bar{I}_2 = V_1^2 + V_2^2 + \frac{1}{V_1^2 V_2^2}. \quad (3.67)$$

С некоторым удивлением обнаруживаем, что выражение (3.67) лишь обозначениями отличается от (3.57). Следовательно, по аналогии можем заключить, что функция  $\bar{I}_2$  имеет минимальное значение, равное 3, при значениях аргументов

$$V_1^2 = 1, \quad V_2^2 = 1.$$

А это соответствует следующим значениям исходных переменных

$$\bar{U}_1^2 = 1, \quad \bar{U}_2^2 = 1.$$

Так что, разность  $\bar{I}_2 - 3$  оказывается положительной при любых значениях  $\bar{U}_1^2$  и  $\bar{U}_2^2$ , кроме  $\bar{U}_1^2 = 1$  и  $\bar{U}_2^2 = 1$ .

Выше было показано, что разность  $\bar{I}_1 - 3$  тоже оказывается положительной при любых значениях  $\bar{U}_1^2$  и  $\bar{U}_2^2$ , кроме  $\bar{U}_1^2 = 1$  и  $\bar{U}_2^2 = 1$ , при которых она обращается в нуль.

Отсюда следует, что все выражения потенциальной энергии  $w$  (3.41), (3.45), (3.50), (3.51), (3.52) и (3.53) оказываются положительными при всех значениях аргументов  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{U}_2$  и  $J$ , за исключением значений

$$\bar{U}_1 = 1, \quad \bar{U}_2 = 1, \quad J = 1,$$

при которых эти энергии принимают чисто нулевое значение.

А это одно из важных свойств всякой потенциальной энергии деформации.

### 3.4. Упругий материал с потенциальной энергией в форме потенциала Огдена

Рассматриваем потенциал следующего вида

$$w = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( \bar{U}_1^{\alpha_i} + \bar{U}_2^{\alpha_i} + \bar{U}_3^{\alpha_i} - 3 \right) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k}. \quad (3.68)$$

Нам предстоит использовать этот потенциал и вычислить тензор напряжений. И вот возникает вопрос: можно ли использовать формулу (1.57) для этой цели, просто отождествляя  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{U}_2$  и  $\bar{U}_3$  с  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ ? Вероятно, для несжимаемого материала такое отождествление не приведет к существенным ошибкам в результате. А вот для сжимаемого материала, скорее всего, приведет к неточностям. Но ведь потенциал (3.68) — это потенциал сжимаемого материала. Поэтому следует приспособить формулу (1.57) для вычислений, когда потенциал упругости задан не в функции главных искажений, а в виде функции модифицированных главных искажений.

Итак, начнем с общих рассуждений. Запишем потенциал (3.68) в более общем виде

$$w = w(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, J). \quad (3.69)$$

Чтобы применить формулу (1.57), необходимо обязательно учесть, что  $w$  по (3.69) зависит от каждого главного искажения  $U_k$  через посредство всех модифицированных искажений  $\bar{U}_k$  и  $J$ . Так что, (3.69) представляет сложную функцию главных искажений  $U_k$ . Следует вспомнить формулу (3.35)

$$\bar{U}_p = J^{-\frac{1}{3}} U_p, \quad (3.70)$$

связывающую модифицированные главные искажения с главными искажениями, и формулу (3.28), дающую представление относительного объема  $J$

$$J = U_1 U_2 U_3. \quad (3.71)$$

Выполняя дифференцирование (3.69) по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial w}{\partial U_k} = \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial U_k} + \frac{\partial w}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial U_k}. \quad (3.72)$$

Учтем представление (3.70). Оно дает

$$\frac{\partial \bar{U}_r}{\partial U_k} = J^{-\frac{1}{3}} \delta_{rk} + U_r \left( -\frac{1}{3} J^{-\frac{1}{3}-1} \right) \frac{\partial J}{\partial U_k}. \quad (3.73)$$

Подставляя это представление в (3.72), придем к следующему результату

$$\frac{\partial w}{\partial U_k} = \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} J^{-\frac{1}{3}} \delta_{rk} + \left( \frac{\partial w}{\partial J} - \frac{1}{3} U_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} J^{-\frac{4}{3}} \right) \frac{\partial J}{\partial U_k}.$$

Наконец, подставив его в (1.57), получим

$$J \sigma_{kk} = U_k \frac{\partial w}{\partial U_k} = \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} J^{-\frac{1}{3}} U_k \delta_{rk} + \left( \frac{\partial w}{\partial J} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} J^{-1} \right) U_k \frac{\partial J}{\partial U_k}, \quad \left( \sum_{/k} \right). \quad (3.74)$$

Напоминаю, что в этой формуле по индексу  $r$  ведется суммирование, а по индексу  $k$  — нет!

Далее, в силу представления (3.71), имеем соотношение

$$U_k \frac{\partial J}{\partial U_k} = J, \quad \left( \sum_{/k} \right).$$

С учетом этого соотношения и с помощью (3.74) получаем следующее выражение для напряжений

$$\sigma_{kk} = \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( -\frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} + \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} \right), \quad \left( \frac{\sum}{/k} \right). \quad (3.75)$$

Вводя обозначение

$$p = - \left( \frac{\partial w}{\partial J} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} J^{-1} \right),$$

можем записать (3.75) в следующей более простой форме

$$\sigma_{kk} = -p + \frac{1}{J} \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k}, \quad \left( \frac{\sum}{/k} \right). \quad (3.76)$$

Это и есть искомая формула: приспособление формулы (1.57) к случаю, когда потенциальная энергия задается в виде функции от модифицированных главных искажений, а не просто главных искажений, и относительного объема  $J$ . Для удобства последующего применения запишем формулу (3.76) в развернутой форме. Эта запись такова

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + \frac{1}{J} \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1}, \\ \sigma_{22} &= -p + \frac{1}{J} \bar{U}_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_2}, \\ \sigma_{33} &= -p + \frac{1}{J} \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Применим эти формулы к анализу простейших состояний деформирования.

### *1. Одноосное растяжение при наличии объемной деформации*

Полагаем, что растяжение цилиндрического стержня происходит вдоль оси  $ox_1$  и задается главным искажением  $U_1$ . Полагаем далее, что искажения вдоль осей  $ox_2$  и  $ox_3$  равны, т.е.

$$U_2 = U_3. \quad (3.78)$$

Наконец, напомним формулу (3.71), связывающую  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  и  $J$

$$U_1 U_2 U_3 = J.$$

Отсюда находим по (3.70) следующее равенство

$$\bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 = 1,$$

которое дает

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = \bar{U}_1^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.79)$$

По первой формуле (3.77) находим напряжение, действующее вдоль оси  $ox_1$

$$\sigma_{11} = -p + \frac{1}{J} \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1}. \quad (3.80)$$

Полагаем, что боковая поверхность растягиваемого стержня свободна от напряжений. Значит, остальные напряжения равны нулю

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p + \frac{1}{J} \bar{U}_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_2} = 0. \quad (3.81)$$

Вычитанием правых и левых частей уравнений (3.80) и (3.81) находим действующее напряжение

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \left( \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} - \bar{U}_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_2} \right). \quad (3.82)$$

Для несжимаемого материала оно упрощается и принимает вид

$$\sigma_{11} = \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} - \bar{U}_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_2}.$$

Подставляя, далее, (3.68) в (3.82), получаем

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \bar{U}_1^{\alpha_i} - \bar{U}_2^{\alpha_i} \right).$$

Наконец, учитывая здесь (3.79), находим

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \bar{U}_1^{\alpha_i} - \bar{U}_1^{-\frac{\alpha_i}{2}} \right). \quad (3.83)$$

Для несжимаемого материала она упрощается и принимает вид

$$\sigma_{11} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left( U_1^{\alpha_i} - U_1^{-\frac{\alpha_i}{2}} \right). \quad (3.84)$$

## 2. Двухосное растяжение пластинки со свободной поверхностью

Полагаем, что плоскость растяжения совпадает с плоскостью  $x_1ox_2$ , а в направлении оси  $ox_3$  отсутствует напряжение. Уточним постановку задачи. Мы полагаем, что вдоль осей  $ox_1$  и  $ox_2$  искажения одинаковы, т.е.

$$U_1 = U_2$$

или

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2.$$



Модифицированное искажение  $\bar{U}_3$  найдем из уравнения (3.78).  
Получаем

$$\bar{U}_3 = \bar{U}_1^{-2}. \quad (3.85)$$

По формулам (3.77) находим растягивающее напряжение и напряжение, действующее перпендикулярно плоскости растяжения, которое, конечно же, равно нулю

$$\sigma_{11} = -p + \frac{1}{J} \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1},$$

$$\sigma_{33} = -p + \frac{1}{J} \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3} = 0.$$

Исключая отсюда  $p$ , находим формулу для вычисления растягивающего напряжения

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \left( \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} - \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3} \right).$$

Подстановка сюда потенциала (3.68) приводит к следующему представлению действующего напряжения

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \bar{U}_1^{\alpha_i} - \bar{U}_3^{\alpha_i} \right).$$

Наконец, учет кинематического условия (3.85) приводит к следующему окончательному результату

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \bar{U}_1^{\alpha_i} - \bar{U}_1^{-2\alpha_i} \right). \quad (3.86)$$

Для несжимаемого материала последняя формула принимает особенно простой вид

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left( U_1^{\alpha_i} - U_1^{-2\alpha_i} \right). \quad (3.87)$$

### 3. Чистый сдвиг

Такое состояние деформирования несжимаемого материала рассматривалось в разделе 2.4. Попробуем обобщить все сказанное там на случай сжимаемого материала. Будем считать, что в направлении  $ox_2$  модифицированное искажение равно 1 (по аналогии с (2.11))

$$\bar{U}_2 = 1. \quad (3.88)$$

Кроме этого, будем считать, что модифицированное искажение вдоль оси  $ox_3$  обратно модифицированному искажению вдоль оси  $ox_1$ , т.е.

$$\bar{U}_3 = \bar{U}_1^{-1}. \quad (3.89)$$

Последнее соотношение написано по аналогии с (2.12).

Главные напряжения находим по формулам (3.77)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + \frac{1}{J} \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1}, \\ \sigma_{22} &= -p + \frac{1}{J} \bar{U}_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_2}, \\ \sigma_{33} &= -p + \frac{1}{J} \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Ни одно из этих напряжений не равно нулю, так что в этом случае не удастся исключить неизвестную величину  $p$  так, как это делалось ранее.

Поэтому поступим так же, как делалось в разделе 2.4. Мы отметили, что характер деформирования подсказывает, что если в направлении оси  $ox_1$  происходит растяжение, то это значит, что в направлении этой оси действует растягивающее напряжение. Ну а если вдоль оси  $ox_3$  происходит соответствующее сокращение длин материальных отрезков, то это означает, что в направлении этой оси действует сжимающее напряжение той же величины. Значит, следует предположить, что  $\sigma_{33} = -\sigma_{11}$  или

$$\sigma_{33} + \sigma_{11} = 0.$$

Естественно, что оно совпадает с (2.16). Подставив сюда представления напряжений по формулам (3.90), получим уравнение

$$-2p + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} + \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3} \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$p = \frac{1}{2J} \left( \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} + \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3} \right).$$

Подставив найденное значение  $p$  в формулы (3.90), получаем следующие представления напряжений

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \left( \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} - \frac{1}{2} \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} - \frac{1}{2} \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3} \right),$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{J} \left( \bar{U}_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_2} - \frac{1}{2} \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} - \frac{1}{2} \bar{U}_3 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_3} \right).$$

Учитывая представление потенциала по (3.68), находим отсюда следующие простые формулы для действующих напряжений

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2J} \sum_{i=1}^N \mu_i (\bar{U}_1^{\alpha_i} - \bar{U}_3^{\alpha_i}),$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i (\bar{U}_2^{\alpha_i} - \bar{U}_1^{\alpha_i} - \bar{U}_3^{\alpha_i}).$$

Наконец, учет кинематических условий приводит к следующему окончательному результату

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2J} \sum_{i=1}^N \mu_i (\bar{U}_1^{\alpha_i} - \bar{U}_1^{-\alpha_i}),$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{U}_1^{\alpha_i} - \frac{1}{2} \bar{U}_1^{-\alpha_i} \right).$$
(3.91)

Еще более простой результат получаем для несжимаемого материала

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i (U_1^{\alpha_i} - U_1^{-\alpha_i}),$$

$$\sigma_{22} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left( 1 - \frac{1}{2} U_1^{\alpha_i} - \frac{1}{2} U_1^{-\alpha_i} \right).$$
(3.92)

Рассмотрим случай малой деформации. Пусть

$$U_1 = 1 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — малая деформация.

Асимптотическое значение напряжений при малой  $\varepsilon$  таково

$$\sigma_{11} = \left( \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \right) \varepsilon,$$

$$\sigma_{22} = 0.$$

Из первого выражения видно, что модуль сдвига имеет следующее выражение через параметры потенциала

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i.$$
(3.93)

#### 4. Всестороннее равномерное сжатие

Полагаем

$$U_1 = U_2 = U_3. \quad (3.94)$$

Напряжения находим по формуле (3.75)

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\partial w}{\partial J} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} J^{-1} + \bar{U}_1 \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_1} J^{-1}.$$

Выполняя суммирование по  $r$  с учетом того, что по (3.94) все главные искажения равны, получим следующее простое выражение

$$\sigma_{11} = \frac{\partial w}{\partial J}.$$

Поставив сюда выражение потенциала (3.68), найдем следующее выражение для напряжения

$$\sigma_{11} = \sum_{i=1}^N \frac{2k}{d_i} (J-1)^{2i-1}. \quad (3.95)$$

Если объемная деформация мала, то имеем

$$J = 1 + \theta.$$

Асимптотическое значение напряжения при малом  $\theta$  таково

$$\sigma_{11} = \frac{2}{d_1} \theta.$$

Приходим к заключению, что модуль объемного сжатия при малой деформации имеет следующее значение

$$k = \frac{2}{d_1}. \quad (3.96)$$

В научной литературе по нелинейной теории упругости используется еще одна форма потенциала Огдена, а именно

$$w = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( J^{\frac{\alpha_i}{3}} \left( \bar{U}_1^{\alpha_i} + \bar{U}_2^{\alpha_i} + \bar{U}_3^{\alpha_i} \right) - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} \left( J^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right). \quad (3.97)$$

Этот потенциал предлагается использовать для описания и изучения деформирования пенистых материалов, для которых характерна значительная объемная сжимаемость.

Используя формулу (3.70), этот потенциал можно преобразовать к следующему более простому виду

$$w = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( U_1^{\alpha_i} + U_2^{\alpha_i} + U_3^{\alpha_i} - 3 \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i \beta_i} \left( J^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right). \quad (3.98)$$

Напряжения найдем по простой формуле (1.57)

$$\sigma_{kk} = \frac{1}{J} U_k \frac{\partial w}{\partial U_k}, \quad \left( \sum'_{/k} \right). \quad (3.99)$$

Следует, однако, обратить внимание читателя на то, что все не так безоблачно просто. Дело в том, что главные искажения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  входят в потенциал (3.98) и непосредственно, и через посредство  $J = U_1 U_2 U_3$ , так что на самом деле

$$w = w(U_1, U_2, U_3, J).$$

Это обстоятельство следует учитывать при вычислении производных, входящих в формулу (3.99), в результате чего последняя слегка изменяется и принимает следующий вид

$$\sigma_{kk} = \frac{1}{J} \left( U_k \frac{\partial w}{\partial U_k} + U_k \frac{\partial w}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial U_k} \right) = \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} U_k \frac{\partial w}{\partial U_k}, \quad \left( \sum'_{/k} \right). \quad (3.100)$$

Вводя обозначение

$$-p = \frac{\partial w}{\partial J},$$

ее можно записать и так

$$\sigma_{kk} = -p + \frac{1}{J} U_k \frac{\partial w}{\partial U_k}, \quad \left( \sum'_{/k} \right). \quad (3.101)$$

В развернутом виде она имеет следующее написание

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + \frac{1}{J} U_1 \frac{\partial w}{\partial U_1}, \\ \sigma_{22} &= -p + \frac{1}{J} U_2 \frac{\partial w}{\partial U_2}, \\ \sigma_{33} &= -p + \frac{1}{J} U_3 \frac{\partial w}{\partial U_3}. \end{aligned}$$

Эти формулы аналогичны формулам (3.77). Эта аналогия позволяет провести анализ простейших состояний деформирования по той же схеме, которая использовалась выше. Так, для одноосного растяжения вместо формулы (3.83) получаем следующую

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( U_1^{\alpha_i} - U_1^{-\frac{\alpha_i}{2}} \right). \quad (3.102)$$

Далее, для двухосного растяжения вместо (3.86) получаем по аналогии

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( U_1^{\alpha_i} - U_1^{-2\alpha_i} \right). \quad (3.103)$$

Наконец, для чистого сдвига вместо формул (3.91) получаем аналогичные формулы

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( U_1^{\alpha_i} - U_1^{-\alpha_i} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( 1 - \frac{1}{2} U_1^{\alpha_i} - \frac{1}{2} U_1^{-\alpha_i} \right). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Обращаю внимание читателя на то, что различие этих формул и их аналогов существенно, потому что потенциалы разные. И только для несжимаемого материала они совпадают со своими аналогами, ибо при этом совпадают и потенциалы (3.68) и (3.97).

Рассмотрим еще одно состояние деформирования — трехосное изотропное растяжение. В этом случае искажения вдоль всех осей координат равны друг другу, т.е.

$$U_1 = U_2 = U_3. \quad (3.105)$$

В результате имеем

$$J = U_1^3$$

или

$$U_1 = J^{\frac{1}{3}}. \quad (3.106)$$

Напряжение следует вычислять по общей формуле (3.100). Имеем последовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial J} &= -\frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i J^{-\alpha_i \beta_i}, \\ \frac{1}{J} U_1 \frac{\partial w}{\partial U_1} &= \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i U_1^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (3.106), получаем следующее значение напряжения

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( J^{\frac{\alpha_i}{3}} - J^{-\alpha_i \beta_i} \right). \quad (3.107)$$

Обратим внимание на случай малых деформаций. Для этого положим

$$U_1 = 1 + \varepsilon.$$

Подставив это значение в (3.103), получим асимптотическое представление напряжения при чистом сдвиге

$$\sigma_{11} = \left( \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \right) \varepsilon, \\ \sigma_{22} = 0.$$

Из первой формулы находим следующее значение модуля сдвига при малой деформации

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i. \quad (3.108)$$

Подставив  $U_1$  по (3.106) в (3.102), получим асимптотическое представление напряжения при одноосном растяжении

$$\sigma_{11} = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \varepsilon.$$

С учетом (3.108) находим

$$\sigma_{11} = 3\mu\varepsilon.$$

Коэффициент  $3\mu$ , появившийся здесь, равен модулю Юнга

$$E = 3\mu.$$

Такая связь между модулем Юнга  $E$  и модулем сдвига  $\mu$  имеет место для несжимаемого материала.

Наконец, при двухосном растяжении соответствующее асимптотическое поведение напряжения находим по формуле (3.103)

$$\sigma_{11} = 2 \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \varepsilon = 4\mu\varepsilon.$$

Обратимся теперь к случаю трехосного изотропного растяжения, т.е. к формуле (3.107). Положим

$$J = 1 + \theta, \quad (3.109)$$

причем  $\theta$  — объемная деформация. Подставив (3.109) в (3.107), и проводя асимптотическое разложение, получим

$$\sigma_{11} = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \left( \frac{1}{3} + \beta_i \right) \theta.$$

Появившийся здесь коэффициент равен модулю объемного сжатия

$$k = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i \left( \frac{1}{3} + \beta_i \right). \quad (3.110)$$

Говоря определеннее, так выражается модуль объемного сжатия через параметры, входящие в потенциал.

### 3.5. Другие представления потенциалов упругих материалов

#### 1. Потенциал Блейтца и Ко

Этот потенциал имеет следующее представление

$$w = \frac{1}{2} \mu \beta \left( I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right) + \frac{1}{2} \mu (1 - \beta) \left( I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^{\alpha} - 1) - 3 \right), \quad (3.111)$$

причем

$$\alpha = \frac{\nu}{1 - 2\nu}.$$

В литературе распространена и используется упрощенная формула потенциала Блейтца и Ко при следующих значениях параметров

$$\beta = 0, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Потенциал принимает следующую, относительно простую, форму

$$w = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right).$$

При одноосном растяжении и при условии несжимаемости, напряжение, действующее вдоль оси растяжения, находим по формуле (2.6) и получаем

$$\sigma_{11} = \mu (U_1 - U_1^{-2}). \quad (3.112)$$

При малой деформации, когда

$$U_1 = 1 + \varepsilon,$$

находим следующее асимптотическое представление этого напряжения

$$\sigma_{11} = 3\mu\varepsilon.$$



При двухосном растяжении и при условии несжимаемости, действующее напряжение находим по формуле (2.10) и в результате получаем

$$\sigma_{11} = \mu(U_1^4 - U_1^{-2}). \quad (3.113)$$

При малой деформации асимптотическое представление этого напряжения таково

$$\sigma_{11} = 6\mu\varepsilon.$$

При чистом сдвиге напряжение вычисляем по формуле (2.17) и получаем

$$\sigma_{11} = \frac{\mu}{2}(U_1^2 - U_1^{-2}). \quad (3.114)$$

Для случая малой деформации находим

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon,$$

так что  $\mu$  представляет модуль сдвига малой деформации.

Наконец, при всестороннем изотропном растяжении напряжение находим по формуле (2.25). Результат вычислений таков

$$\sigma_{11} = \frac{2}{U_1} \left( 2U_1^2 \frac{\partial w}{\partial I_2} + U_1^4 \frac{\partial w}{\partial I_3} \right).$$

Вычисляя производные от потенциала, и подставляя полученное значение в эту формулу, получим следующее выражение

$$\sigma_{11} = 2U_1 \left( \frac{\mu}{I_3} + U_1^2 \left( -\frac{\mu I_2}{2 I_3^2} + \frac{\mu}{2 \sqrt{I_3}} \right) \right).$$

Наконец, внесем сюда значения инвариантов по формулам раздела 2.5, получим удивительно простое выражение

$$\sigma_{11} = \mu(1 - U_1^{-5}). \quad (3.115)$$

При малой деформации, когда

$$U_1 = 1 + \varepsilon,$$

приходим к следующему асимптотическому представлению

$$\sigma_{11} = 5\mu\varepsilon. \quad (3.116)$$

При всестороннем изотропном растяжении-сжатии объемная деформация равна утроенной линейной, т.е.

$$\theta = 3\varepsilon,$$

так что из (3.116) находим

$$\sigma = k\theta = \frac{5\mu}{3}\theta.$$

Отсюда видно, что модуль объемного сжатия имеет следующее выражение через модуль сдвига материала

$$k = \frac{5\mu}{3}.$$

### 2. Потенциал Арруда – Бойса

Этот потенциал имеет следующее весьма сложное строение

$$w = \mu \left[ \frac{1}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_L^2}(\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_L^4}(\bar{I}_1^3 - 27) + \right. \\ \left. + \frac{19}{7000\lambda_L^6}(\bar{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{673750\lambda_L^8}(\bar{I}_1^5 - 243) \right] + \\ + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right). \quad (3.117)$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига в начальном состоянии, а  $d$  — материальная постоянная, через которую выражается модуль объемного сжатия

$$k = \frac{2}{d}. \quad (3.118)$$

Наконец,  $\lambda_L$  — некоторое предельное искажение. Когда  $\lambda_L \rightarrow \infty$ , предлагаемый потенциал стремится к нео-гукову потенциалу (3.41), правда только для несжимаемого материала.

### 3. Потенциал Гента

$$w = \frac{\mu J_m}{2} \ln \left( 1 - \frac{\bar{I}_1 - 3}{J_m} \right)^{-1} + \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right). \quad (3.119)$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига в начальном состоянии, а модуль объемного сжатия выражается через  $d$  по формуле (3.118). Наконец,  $J_m$  — некоторое предельное значение разности  $(\bar{I}_1 - 3)$ .

### 4. Потенциал Еоха

$$w = \sum_{i=1}^N C_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i}.$$

Это частный случай полиномиального представления (3.53).

Модуль сдвига начального состояния равен

$$\mu = 2C_{10},$$

а модуль объемного сжатия

$$k = \frac{1}{d_1}.$$

При  $N = 1$  этот потенциал превращается в нео-гуков потенциал (3.41).

### **3.6. Общее рассуждение о возможной зависимости потенциалов упругости от температуры**

Подведем промежуточный итог рассуждениям об определяющих уравнениях упругого материала. Исходной формой были традиционные уравнения (1.1). Из них следовало, что реакции материала, а именно, тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , вектор теплового потока  $\mathbf{h}$ , плотность свободной энергии  $\psi$  и плотность внутренней энтропии  $S$  зависят от определяющих параметров, а именно, от температуры, ее градиента, меры деформации Фингера и, наконец, от тензора поворота  $\mathbf{V}$ .

Так вот, проведенный выше анализ позволил выявить характерные особенности зависимости реакций от каждого из определяющих параметров. Так, учет изотропности упругого материала позволил исключить из (1.1) тензор поворота  $\mathbf{V}$  и перейти к более простой зависимости (1.5). Далее, термодинамический анализ показал, что градиент температуры вообще не входит ни в свободную энергию (1.11), ни во внутреннюю энтропию  $S$ , ни в тензор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Более того, оказалось, что свободная энергия играет решающую роль в том смысле, что через нее выражается и плотность внутренней энтропии, и напряжения. Напоминаю, что они выражаются через главные значения меры деформации Фингера и температуру. При альтернативном подходе к проблеме составления определяющих уравнений с использованием другого набора определяющих параметров тоже оказалось, что свободная энергия опять играет решающую роль и что она зависит от главных значений меры деформации Коши – Грина и температуры. Вместе с тем, в главе 1 учебного пособия [7] показано, что главные значения мер деформации Фингера и Коши – Грина равны друг другу. Таким образом,

оказалось, что если известно представление свободной энергии в первом подходе, то представление ее во втором подходе получается из первого простой заменой главных значений и наоборот. Поэтому достаточно знать одно из представлений свободной энергии.

В главе 3 приведены примеры представлений свободной энергии через меру деформации Коши – Грина. Однако, ни в одно из этих представлений никак не входит температура. Так что, все приведенные примеры можно истолковать, как примеры, пригодные только для изотермического случая  $T = T_0 = const$ . Но ведь общая формула (1.11) предполагает зависимость свободной энергии от температуры, которая, конечно же, может изменяться как во времени, так и в зависимости от пространственных координат. Можно, конечно, заявить, что температура входит в параметры всех приведенных примеров потенциалов упругости, выраженных через свободную энергию. Такое суждение оказывается совершенно ошибочным. Поэтому следует рассмотреть этот вопрос более обстоятельно. Чтобы не затруднять это рассмотрение, ограничимся сначала простейшим потенциалом упругости — потенциалом нео-гукова материала (3.41)

$$w = \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2,$$

где  $\bar{I}_1$  — первый инвариант модифицированной меры деформации Коши – Грина

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2 + \bar{U}_3^2.$$

Он принадлежит к классу потенциалов, которые можно записать в форме (3.69). Поэтому напряжение находим по формуле (3.75)

$$\sigma_{kk} = \frac{\partial w}{\partial J} - \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right), \quad \left( \sum_{/k} \right).$$

В результате получаем следующие выражения напряжений

$$\sigma_{kk} = \frac{2}{d}(J - 1) + \frac{\mu}{J} \left( \bar{U}_k \bar{U}_k - \frac{1}{3} \bar{U}_r \bar{U}_r \right), \quad \left( \sum_{/k} \right). \quad (3.120)$$

Напоминаю, что по индексу  $r$  ведется суммирование от 1 до 3, а по индексу  $k$  — нет!

Вычислим напряжения в начальный момент или, что то же самое, в начальном состоянии. При этом  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$  и, значит,  $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ . Далее,  $J = 1$ ,  $\bar{U}_k = 1$  и тогда напряжения (3.120) обращаются в нуль

$$\sigma_{kk} = 0, \quad \left( \sum_{/k} \right). \quad (3.121)$$

Это странно! А странно то, что эти напряжения обратились в нуль независимо от температуры. Разумеется, равенство (3.121) может иметь место при одной температуре, например, при начальной температуре  $T_0$ , но не при любой  $T$ . Действительно, пусть некоторое упругое тело зажато так, что оно не может ни расширяться, ни сжиматься, т.е. будет  $U_1 = U_2 = U_3 = J = 1$  и пусть при начальной температуре  $T_0$  напряжения в нем равны нулю, как это оказалось в (3.121). Изменим температуру тела, например, нагреем его. По закону природы при нагревании все тела либо расширяются, либо сжимаются. А ведь мы воспрепятствовали этой деформации, запретив ее вообще. Что же произойдет? Здравый смысл подсказывает, что в теле возникнут напряжения, которые будут компенсировать запрещенную тепловую деформацию. Итак, мы пришли к заключению, что ситуация (3.121) может иметь место только при одной температуре  $T_0$ , а при других температурах должны возникнуть напряжения. Напрашивается вывод: потенциал упругости нео-гукова материала вообще не пригоден для описания и исследования температурных напряжений. Необходима его модернизация.

Предлагаю следующее модернизированное представление потенциала упругости

$$w = A(J - 1) + \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3.122)$$

Напряжения оказываются такими

$$\sigma_{kk} = A + \frac{2}{d}(J - 1) + \frac{\mu}{J} \left( \bar{U}_k \bar{U}_k - \frac{1}{3} \bar{U}_r \bar{U}_r \right), \quad \left( \sum_{/k} \right). \quad (3.123)$$

Легко увидеть, что в начальном состоянии, т.е. при отсутствии деформирования ( $J = 1$ ,  $\bar{U}_k = 1$ ) напряжения не равны нулю

$$\sigma_{kk} = A, \quad \left( \sum' / k \right). \quad (3.124)$$

Чтобы согласовать полученный результат с приведенными выше рассуждениями, следует предположить, что начальное напряжение  $A$  является функцией температуры, и что последнее обращается в нуль при  $T = T_0$ . Таким образом, приходим к заключению, о том, что модернизированный потенциал (3.122) не приводит к обнаруженному выше противоречию.

Итак,

$$A = A(T).$$

Подставив это выражение в (3.123), получим выражение напряжений

$$\sigma_{kk} = A(T) + \frac{2}{d}(J - 1) + \frac{\mu}{J} \left( \bar{U}_k \bar{U}_k - \frac{1}{3} \bar{U}_r \bar{U}_r \right), \quad \left( \sum' / k \right). \quad (3.125)$$

Попытаемся выяснить механический смысл функции  $A(T)$ . Мы уже знаем, что она равна напряжениям, возникающим в теле при нагреве при запрещенной деформации. Однако, измерять напряжения в телах трудно, хотя и можно. Лучше бы, что-нибудь кинематическое!

Рассмотрим свободное тепловое расширение термоупругого тела. Возникающая деформация должна быть найдена из условия обращения в нуль напряжений по (3.125), т.е. из уравнения

$$A(T) + \frac{2}{d}(J_T - 1) + \frac{\mu}{J} \left( \bar{U}_{kT} \bar{U}_{kT} - \frac{1}{3} \bar{U}_{rT} \bar{U}_{rT} \right) = 0, \quad \left( \sum' / k \right). \quad (3.126)$$

Здравый смысл подсказывает, что изотропное термоупругое тело при свободном тепловом расширении расширяется во все стороны одинаково. А это означает, что  $\bar{U}_{1T} = \bar{U}_{2T} = \bar{U}_{3T}$ . Но тогда уравнение (3.126) принимает вид

$$A(T) + \frac{2}{d}(J_T - 1) = 0,$$

из которого находим

$$A(T) = -\frac{2}{d}(J_T - 1). \quad (3.127)$$

Кроме того, известна связь  $J_T$  с  $U_T$

$$J_T = U_{1T} U_{2T} U_{3T} = U_T^3. \quad (3.128)$$

Формулы (3.127) и (3.128) демонстрируют механический смысл функции  $A(T)$ . Она выражается через отношение объемов при тепловом расширении  $J_T$ . Последнее представляет отношение объема некоторого элементарного параллелепипеда после нагрева до температуры  $T$  к его объему до нагрева, т.е. при  $T = T_0$ . Формула (3.128) дает выражение  $J_T$  через отношение линейных размеров некоторого отрезка после нагрева к линейному размеру до нагрева. В линейной теории это отношение записывается следующим образом

$$U_T = 1 + \alpha(T - T_0), \quad (3.129)$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения материала.

С помощью (3.129) находим соответствующее представление  $J_T$

$$J_T = (1 + \alpha(T - T_0))^3. \quad (3.130)$$

Простейшее представление обобщений  $U_T$  и  $J_T$  на нелинейный случай таковы

$$U_T = \exp(\alpha(T - T_0)), \quad J_T = \exp(3\alpha(T - T_0)). \quad (3.131)$$

Таким образом, мы установили механический смысл  $U_T$  и  $J_T$ , которые могут быть легко измерены в некотором эксперименте с равномерным нагревом малых кусков материала. Термическое напряжение  $A(T)$  легко выражается через названные кинематические величины.

После того, как выяснен механический смысл функции  $A(T)$ , выражающей начальные напряжения, вернемся к выражению напряжения (3.123) и потенциала (3.122) и подставим в них представление  $A(T)$  по (3.127). Тогда получим полезную формулу для напряжения и потенциала

$$\sigma_{kk} = \frac{2}{d}(J - J_T) + \frac{\mu}{J} \left( \bar{U}_k \bar{U}_k - \frac{1}{3} \bar{U}_r \bar{U}_r \right), \quad \left( \frac{\sum}{/k} \right), \quad (3.132)$$

$$w = -\frac{2}{d}(J_T - 1)(J - 1) + \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3.133)$$

Подведем итог проделанным рассуждениям. При исследовании поведения нео-гукова материала при изменяющейся во времени температуре вместо потенциала упругости (3.41) следует использовать потенциал упругости (3.122) или (3.133). Легко сообразить, что этот вывод должен быть распространен на все другие потенциалы упругости,

приведенные в этой главе. Во всех этих потенциалах должно появиться слагаемое  $A(J-1)$  или  $A(\sqrt{I_3}-1)$ . Если оно появится, то все приведенные выше потенциалы упругости оказываются пригодными для описания и исследования термомеханических эффектов. Без названного дополнительного слагаемого все приведенные потенциалы упругости оказываются непригодными для описания термомеханических эффектов в упругих материалах.

Таким образом, мы можем констатировать следующее. В огромной литературе по нелинейной теории упругости потенциалы упругости сконструированы таким образом, что при нулевой деформации напряжения обращаются в нуль. А это означает, что начальные напряжения равны нулю. Но ведь это вопиющее нарушение здравого смысла! Чтобы избежать этого нарушения следует внести в потенциал упругости  $w$  дополнительное слагаемое  $A(J-1)$ , где  $A$  — начальное нормальное напряжение.

Учитываем то, что потенциал  $w$  связан со свободной энергией следующей формулой

$$w = \rho_0 \psi.$$

Это означает, что в свободной энергии  $\psi$  должно появиться дополнительное слагаемое

$$\frac{A}{\rho_0}(J-1) = \frac{A}{\rho_0}(\sqrt{I_3}-1).$$

Тогда свободная энергия примет следующий вид

$$\psi = \frac{A}{\rho_0}(\sqrt{I_3}-1) + \psi_*, \quad (3.134)$$

где  $\psi_*$  — традиционное представление свободной энергии.

Выражусь более определенно:  $\psi^*$  — это такое представление свободной энергии, при использовании которой начальные напряжения равны нулю. Это любое из приведенных выше выражений потенциальной энергии  $w$  и соответствующих выражений свободной энергии.

К чему приводит такая модернизация выражения свободной энергии? Конечно к тому, что во всех выражениях для напряжений появится



дополнительное слагаемое  $A\mathbf{E}$ , выражающее наличие начальных напряжений.

### 3.7. О вычислении параметров потенциалов упругости по результатам экспериментов

Для полной ясности рассмотрим этот вопрос на примере простейшего определяющего уравнения упругого материала — нео-гукова материала. Потенциал упругости в изотермическом случае  $T = T_0$  имеет выражение (3.41). Рассмотрим эксперимент с одноосным растяжением. Как было показано выше, напряжение имеет выражение (3.42), т.е.

$$\sigma_{11} = \mu(U_1^2 - U_1^{-1}), \quad (3.135)$$

где  $\mu$  — неизвестный параметр (модуль), а  $U_1$  — наибольшее главное искажение.

Условимся использовать только деформацию Генки

$$\varepsilon = \ln U_1.$$

Тогда  $U_1$  примет вид

$$U_1 = e^\varepsilon. \quad (3.136)$$

Подставив (3.136) в (3.135), получим

$$\sigma_{11} = \mu 2e^{\frac{\varepsilon}{2}} \operatorname{sh} \frac{3\varepsilon}{2}. \quad (3.137)$$

Это теоретическое значение напряжения при заданной деформации  $\varepsilon$ .

Рассмотрим три способа определения  $\mu$ .

1. Допустим, что при некоторой заданной деформации  $\varepsilon$  экспериментальное значение напряжения равно  $\sigma_{11e}$ . Приравняем его к выражению (3.137). Получим уравнение

$$\sigma_{11e} = \mu 2e^{\frac{\varepsilon}{2}} \operatorname{sh} \frac{3\varepsilon}{2},$$

из которого находим единственное значение модуля  $\mu$ , т.е.

$$\mu = \frac{\sigma_{11e}}{2e^{\frac{\varepsilon}{2}} \operatorname{sh} \frac{3\varepsilon}{2}}. \quad (3.138)$$

2. Если деформация  $\varepsilon$  мала, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ , то из (3.138) находим

$$\mu = \frac{\sigma_{11e}}{3\varepsilon}.$$

В этом случае  $\mu$  находится, как наклон касательной к зависимости  $\sigma_{11e} - \varepsilon$  при малых  $\varepsilon$ .

3. Допустим теперь, что проведено  $N$  экспериментов, так что имеем  $N$  значений деформации  $\varepsilon_k$  и соответствующих им напряжений  $\sigma_{11e_k}$ . Вычислим средний квадрат разности между экспериментальными значениями напряжений и их теоретическими значениями (3.137)

$$I = \sum_{k=1}^N \left( \sigma_{11e_k} - \mu 2e^{\frac{\varepsilon_k}{2}} \operatorname{sh} \frac{3\varepsilon_k}{2} \right)^2$$

и найдем  $\mu$  из условия минимизации  $I$ , т.е. из условия

$$\sum_{k=1}^N \left( \sigma_{11e_k} - \mu 2e^{\frac{\varepsilon_k}{2}} \operatorname{sh} \frac{3\varepsilon_k}{2} \right)^2 = \min_{\mu}. \quad (3.139)$$

Следует признать, что третий способ дает наилучшее приближение для  $\mu$ , хотя бы потому, что он наименее чувствителен к разбросу экспериментальных данных на назначенном множестве  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_N$ .

Обратимся теперь к экспериментам по свободному термическому расширению упругого тела ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ ). Тогда с помощью (3.136) и (3.131) находим

$$U_1 = e^{\varepsilon_T} = \exp(\alpha(T - T_0))$$

или

$$\varepsilon_T = \alpha(T - T_0), \quad (3.140)$$

причем  $\varepsilon_T$  — термическая деформация.

Как и в изотермическом случае возможно три способа вычисления коэффициента линейного расширения  $\alpha$  по данным эксперимента.

1. Если в эксперименте измерено только одно значение температуры  $T$  и соответствующее ему значение деформации  $\varepsilon_T$ , то из (3.140) получаем единственное значение  $\alpha$ , т.е.

$$\alpha = \frac{\varepsilon_T}{T - T_0}. \quad (3.141)$$

2. Второй способ состоит в проведении касательной к зависимости  $\varepsilon_T - (T - T_0)$  при малых  $(T - T_0)$ .

3. Наконец, если проведено  $N$  экспериментов, в которых измерены температуры  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_N$  и соответствующие им тепловые деформации  $\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}, \varepsilon_{T3}, \dots, \varepsilon_{TN}$ , то коэффициент линейного расширения целесообразно находить из условия минимизации среднего квадрата разности экспериментальных значений  $\varepsilon_{Tk}$  и их теоретических значений  $\alpha(T - T_0)$ , т.е. из условия

$$\sum_{k=1}^N (\varepsilon_{Tk} - \alpha(T_k - T_0))^2 = \min_{\alpha}.$$

Так же, как и ранее, это значение  $\alpha$  наименее чувствительно к разбросу экспериментальных данных.

## 4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКИХ МАТЕРИАЛОВ

### 4.1. Определение вязкого материала

С понятием вязкого материала связано интуитивное представление о зависимости реакции материала  $\sigma$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\psi$ ,  $S$  от скорости деформирования. Это означает, что в определяющих уравнениях вязкого материала вместо тензора Фингера  $\mathbf{F}$  должны фигурировать следующие операторы от него

$$\mathbf{D} = -(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^S, \quad \mathbf{\Omega} = -(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^A. \quad (4.1)$$

Первый из них называется тензором скоростей деформаций, а второй — тензором вихря. В результате этого определяющие уравнения вязкого материала будут иметь следующий вид

$$\begin{cases} \sigma = \sigma\{T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{B}\} = \sigma\{T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}\}, \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}\{T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{B}\} = \mathbf{h}\{T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}\}, \\ \psi = \psi\{T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{B}\} = \psi\{T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}\}, \\ S = S\{T, \Gamma, \mathbf{F}, \mathbf{B}\} = S\{T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}\}. \end{cases}$$

Как всегда, здесь приняты следующие обозначения:

- $\sigma$  — тензор напряжений,
- $\mathbf{h}$  — вектор теплового потока,
- $\psi$  — плотность свободной энергии,
- $S$  — плотность внутренней энтропии,
- $T$  — абсолютная температура,
- $\Gamma$  — градиент температуры,
- $\mathbf{B}$  — тензор поворота.

Далее, в соответствии с интуитивным представлением тензор Фингера заменен на тензор скоростей деформации и на тензор вихря. Допустимо ли делать такую замену? Полагаю, что да! Это просто потому, что и справа, и слева стоят операторы от  $\mathbf{F}$ , только слева он входит непосредственно, а справа — через посредство  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{\Omega}$ , которые сами по себе являются операторами от  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{B}$ .

## 4.2. Определяющие уравнения термовязкого материала и их предварительный общий анализ

По аналогии с определяющими уравнениями упругого материала ограничимся рассмотрением только функций от определяющих параметров и от  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{\Omega}$ , а не функционалов, т.е. будем писать следующим образом

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}), \\ \psi = \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}), \\ S = S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{B}). \end{cases} \quad (4.2)$$

Справедливы следующие две теоремы, касающиеся этих определяющих уравнений.

*Теорема 4.1.* Тензор вихря  $\mathbf{\Omega}$ , т.е. спин не входит в определяющие уравнения (4.2) вязкого материала.

*Теорема 4.2.* Определяющие уравнения вязкого материала удовлетворяют условиям определения изотропного материала только в том случае, когда тензор поворота  $\mathbf{B}$  не входит в (4.2).

Доказательство этих теорем построено с использованием принципа материальной объективности.

В учебном пособии [8] он формулируется в форме тождеств (2.29)

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{h}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}, \quad \psi_Q = \psi, \quad S_Q = S, \quad (4.3)$$

в которых использованы обозначения (4.2) для напряжений, градиента температуры, плотности свободной энергии, плотности внутренней энтропии и следующие обозначения для этих же величин в  $\mathbf{Q}$  – движении

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_Q = \boldsymbol{\sigma}(T_Q, \Gamma_Q, \mathbf{D}_Q, \mathbf{\Omega}_Q, \mathbf{B}_Q), \\ \mathbf{h}_Q = \mathbf{h}(T_Q, \Gamma_Q, \mathbf{D}_Q, \mathbf{\Omega}_Q, \mathbf{B}_Q), \\ \psi_Q = \psi(T_Q, \Gamma_Q, \mathbf{D}_Q, \mathbf{\Omega}_Q, \mathbf{B}_Q), \\ S_Q = S(T_Q, \Gamma_Q, \mathbf{D}_Q, \mathbf{\Omega}_Q, \mathbf{B}_Q), \end{cases} \quad (4.4)$$

причем, как показано в [8], входящие сюда величины имеют следующие представления

$$\begin{aligned} T_Q &= T, & \Gamma_Q &= \mathbf{Q} \cdot \Gamma, & \mathbf{D}_Q &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \\ \Omega_Q &= \mathbf{Q} \cdot \Omega \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}, & \mathbf{B}_Q &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{q}$  — тензор вихря для тензора  $\mathbf{Q}$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (4.6)$$

Подставив представления реакций материала (4.2) в основном движении и (4.4) для этих реакций в  $\mathbf{Q}$ -движении в условия (4.3), получим следующие уравнения, которые должны оказаться тождествами

$$\begin{aligned} \sigma(T, \mathbf{Q} \cdot \Gamma, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \Omega \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}) &= \\ &= \mathbf{Q} \cdot \sigma(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{Q}^T, \\ \mathbf{h}(T, \mathbf{Q} \cdot \Gamma, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \Omega \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}) &= \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}), \\ \psi(T, \mathbf{Q} \cdot \Gamma, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \Omega \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}) &= \\ &= \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}), \\ S(T, \mathbf{Q} \cdot \Gamma, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \Omega \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}) &= \\ &= S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Снова повторяю, что это тождества, которые должны выполняться при произвольных функциях  $\mathbf{Q}(t)$  и  $\mathbf{q}(t)$ . Обращаю внимание читателя на то, что в уравнения (4.7) входят значения  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{q}$  в один момент времени, а именно в момент  $t$ , говоря точнее, одно значение  $\mathbf{Q}$  и одно значение  $\mathbf{q}$ . Пользуясь имеющимся произволом, примем, что  $\mathbf{Q}$  равен  $\mathbf{E}$ , т.е.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E},$$

а  $\mathbf{q}$  оставим произвольным.

Тогда «тождества» (4.7) преобразуются к следующему виду

$$\begin{aligned} \sigma(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega + \mathbf{q}, \mathbf{B}) &= \sigma(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}), \\ \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega + \mathbf{q}, \mathbf{B}) &= \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}), \\ \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega + \mathbf{q}, \mathbf{B}) &= \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}), \\ S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega + \mathbf{q}, \mathbf{B}) &= S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \Omega, \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Очевидно, что (4.8) обращается в тождества при  $\mathbf{q} = 0$ . Но этот случай не подходит, потому что выше было принято предположение о том, что

антисимметричный тензор  $\mathbf{q}$  произволен. Воспользуемся теперь этим произволом и положим

$$\mathbf{q} = -\mathbf{\Omega}. \quad (4.9)$$

Тогда получим из (4.8)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{O}, \mathbf{V}) &= \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{\Omega}, \mathbf{V}), \\ \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{O}, \mathbf{V}) &= \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{\Omega}, \mathbf{V}), \\ \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{O}, \mathbf{V}) &= \psi(T, \Gamma, \mathbf{\Omega}, \mathbf{V}), \\ S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{O}, \mathbf{V}) &= S(T, \Gamma, \mathbf{\Omega}, \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Справа здесь оказались значения тензора напряжений, теплового потока, свободной энергии и плотности внутренней энтропии. А вот в левой части стоят те же выражения, в которых тензор вихря  $\mathbf{\Omega}$  равен постоянной величине нуль. Но тогда  $\mathbf{\Omega}$  можно и не упоминать. Это обстоятельство является вполне достаточным чтобы признать, что теорема 4.1 доказана, и что определяющее уравнение термовязкого материала имеет более простой вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}), \\ \psi = \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}), \\ S = S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}). \end{cases} \quad (4.11)$$

Тензор вихря сюда не входит!

Вместе с тем вторая теорема не доказана. Уравнения (4.11) представляют определяющие уравнения в общем случае анизотропного термовязкого материала. Чтобы выявить условия, при которых материал окажется изотропным, воспользуемся требованием изотропии (3.14) учебного пособия [8] и приспособим его к нашим потребностям, заменив в нем тензор Фингера  $\mathbf{F}$  на тензор скоростной деформации  $\mathbf{D}$ , а тензор  $\mathbf{\Omega}$  не будем включать по уже доказанному. Так что, получим из этих условий

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}) &= \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}), \\ \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}) &= \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}), \\ \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}) &= \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}), \\ S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}) &= S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

В выборе произвольного тензора  $\mathbf{H}$  мы не связаны никакими обязательствами. Положим

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}^{-1}.$$

Тождества (4.12) примут вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{E}) &= \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{B}), \\ \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{E}) &= \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{B}), \\ \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{E}) &= \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{B}), \\ S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{E}) &= S(T, \Gamma, \mathbf{D}, \mathbf{B}).\end{aligned}$$

Справа здесь стоят значения тензора напряжений, вектора теплового потока, свободной энергии и плотности внутренней энтропии, а в левой — их же значения, когда тензор поворота имеет постоянное значение  $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ . Но тогда тензор  $\mathbf{B}$  можно и не упоминать, и не писать.

Так что, определяющие уравнения изотропного термовязкого материала принимают более простой вид, чем (4.11)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \Gamma, \mathbf{D}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \Gamma, \mathbf{D}), \\ \psi = \psi(T, \Gamma, \mathbf{D}), \\ S = S(T, \Gamma, \mathbf{D}). \end{cases} \quad (4.13)$$

Это очень сложные определяющие уравнения, потому что аргументами здесь являются два определяющих параметра —  $\Gamma$  и  $\mathbf{D}$ . Ранее подобная ситуация уже встречалась при изучении термоупругого материала. Но там анализ существенно упростился, потому что термодинамические рассуждения показали, что вектор теплового потока не входит ни в свободную энергию  $\psi$ , ни в плотность внутренней энтропии, ни, наконец, даже в тензор напряжений. Здесь таких упрощений не возникает. Поэтому отложим общий анализ на последующее и начнем рассмотрение с более простого случая, когда вектор градиента температуры вообще не входит в определяющие уравнения.

### 4.3. Определяющие уравнения изотропного вязкого материала

Полагаем, что определяющие уравнения не содержат  $\Gamma$ , т.е. имеют вид



$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \mathbf{D}), \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \mathbf{D}), \\ \psi = \psi(T, \mathbf{D}), \\ S = S(T, \mathbf{D}). \end{cases} \quad (4.14)$$

Поведем термодинамический анализ этих уравнений. Универсальное диссипативное неравенство имеет вид (1.29) из [8]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (4.15)$$

Вычисляем  $\dot{\psi}$  и получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{D}}.$$

Подставляем это выражение в (4.15), группируем слагаемые и приходим к следующему неравенству

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} + S \right) \dot{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{D}} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (4.16)$$

Отмечаем, что  $\dot{T}$ ,  $\dot{\mathbf{D}}$  и  $\boldsymbol{\Gamma}$  входят сюда линейно. Поэтому по теореме о линейных неравенствах получаем следующие необходимые и достаточные условия выполнения (4.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial T} + S &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} &= 0, \\ \mathbf{h} &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Отсюда находим

$$\psi = \psi(T), \quad S = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \mathbf{h} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} \geq 0. \quad (4.18)$$

Никаких условий на выбор первой зависимости (4.14) не получилось. Воспользуемся тем, что допускается из соображений принципа материальной объективности, а именно, (2.45) из [8]

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0 \mathbf{E} + A_1 \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2, \quad (4.19)$$

где коэффициенты  $A_i$  — функции температуры и инвариантов тензора  $\mathbf{D}$

$$A_k = A_k(T, I_1, I_2, I_3), \quad k = 1, 2, 3.$$

Единственное ограничение, которое накладывается на (4.19) — это последнее условие (4.18)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = A_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + A_1 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{D} \geq 0.$$

Пока выражение  $A_k$  не конкретизировано, невозможно найти условие выполнения этого неравенства. А если конкретизировать, то тоже будет невозможно, ибо сложно. Определяющее уравнение (4.19) называется иногда уравнением неньютоновской вязкой жидкости, в отличие от ньютоновской жидкости, когда уравнение (4.19) линейно.

Построим такое линейное уравнение. Для этого следует провести линеаризацию уравнения (4.19). Допустим, что тензор скоростей деформации мал, в определенном смысле. Тогда последним слагаемым в (4.19) можно пренебречь по сравнению с двумя первыми. А теперь, когда сделан этот шаг, можно и уточнить, в каком смысле мал тензор скоростей деформации: он мал в том смысле, что все последнее слагаемое целиком мало по сравнению с первыми двумя. Итак, мы отбрасываем последнее слагаемое в (4.19) и получаем следующий результат

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0 \mathbf{E} + A_1 \mathbf{D}. \quad (4.20)$$

Можно ли на этом остановиться? Конечно, нет! Ведь коэффициенты  $A_k$  здесь тоже зависят от  $\mathbf{D}$ . Так что, следует линеаризировать и их. Но они зависят от инвариантов. Проведем линеаризацию по этим инвариантам. Получим следующие разложения

$$\begin{aligned} A_0 &= A_{00}(T) + A_{01}(T)I_1 + A_{02}(T)I_2 + A_{03}(T)I_3 + \dots, \\ A_1 &= A_{10}(T) + A_{11}(T)I_1 + A_{12}(T)I_2 + A_{13}(T)I_3 + \dots \end{aligned}$$

Здесь не выписаны слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с теми, которые сохранены. Подставив эти разложения в (4.20), получим уравнение, с которым предстоит еще поработать

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (A_{00}(T) + A_{01}(T)I_1 + A_{02}(T)I_2 + A_{03}(T)I_3 + \dots) \mathbf{E} + \\ &+ (A_{10}(T) + A_{11}(T)I_1 + A_{12}(T)I_2 + A_{13}(T)I_3 + \dots) \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Пренебрежем здесь теми слагаемыми, которые имеют порядок малости выше первого. При оценках этих слагаемых учтем, что  $I_1$  уже имеет первый порядок малости по отношению к  $\mathbf{D}$ , а  $I_2$  — даже второй, а  $I_3$  — третий. Запишем все то, что остается

$$\boldsymbol{\sigma} = A_{00}(T) \mathbf{E} + A_{01}(T) I_1 \mathbf{E} + A_{10}(T) \mathbf{D}. \quad (4.21)$$

Для упрощения последующих рассуждений представим тензор скоростей деформации в виде разложения на шаровую и девиаторную части

$$\mathbf{D} = \frac{I_1}{3} \mathbf{E} + \mathbf{d},$$

где  $\mathbf{d}$  обозначает девиатор  $\mathbf{D}$ .

Подставив последнее выражение в (4.21) и группируя слагаемые, получим

$$\boldsymbol{\sigma} = A_{00}(T) \mathbf{E} + \left( A_{01}(T) + \frac{A_{10}(T)}{3} \right) I_1 \mathbf{E} + A_{10}(T) \mathbf{d}.$$

Для упрощения последующих вычислений, введем обозначения

$$\lambda = A_{01}(T) + \frac{A_{10}(T)}{3}, \quad 2\eta = A_{10}(T),$$

и тогда  $\boldsymbol{\sigma}$  примет следующий вид

$$\boldsymbol{\sigma} = A_{00}(T) \mathbf{E} + \lambda I_1 \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}. \quad (4.22)$$

Подставим его в последнее неравенство (4.18), которое гарантирует выполнение универсального диссипативного неравенства. Получим следующий результат

$$A_{00}(T) \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{D} + \lambda I_1 \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{D} + 2\eta \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{d} \geq 0,$$

в котором первый инвариант  $\mathbf{D}$  имеет выражение

$$I_1 = \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{D}.$$

Учитывая это обстоятельство, придем к следующему неравенству

$$A_{00}(T) I_1 + \lambda I_1^2 + 2\eta \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{d} \geq 0. \quad (4.23)$$

Это неравенство содержит как линейное, так и квадратичные относительно  $\mathbf{D}$  слагаемые. Пусть  $\mathbf{D}$  мало. Тогда окажется, что второе и третье слагаемые будут малы по сравнению с первым. В этом случае (4.23) примет вид

$$A_{00}(T) I_1 \geq 0.$$

Это линейное неравенство. Условие его выполнения таково

$$A_{00}(T) = 0. \quad (4.24)$$

Поскольку  $A_{00}(T)$  не зависит от  $I_1$ , то последнее равенство будет иметь место всегда, даже в том случае, когда последние слагаемые уже не будут пренебрежимо малыми. И тогда неравенство (4.23) примет следующий вид

$$\lambda I_1^2 + 2\eta \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \geq 0. \quad (4.25)$$

Оно должно выполняться при произвольном тензоре  $\mathbf{D}$ , а значит при произвольных значениях первого инварианта  $I_1$  и девиатора  $\mathbf{d}$ . Пользуясь этим произволом, положим  $\mathbf{d} = 0$ . Тогда получим

$$\lambda I_1^2 \geq 0,$$

откуда следует, что

$$\lambda \geq 0. \quad (4.26)$$

Положив теперь  $I_1 = 0$ , получим из (4.25) очередное неравенство

$$2\eta \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \geq 0,$$

из которого следует

$$\eta \geq 0. \quad (4.27)$$

Учитывая (4.24), найдем окончательно следующее выражение тензора напряжений в вязком материале

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda I_1 \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}.$$

Это и есть уравнение ньютоновской жидкости. Коэффициент  $\lambda$  носит название объемной вязкости, а коэффициент  $\eta$  — сдвиговой вязкости. В силу (4.26) и (4.27), коэффициенты вязкости  $\lambda$  и  $\eta$  не могут быть отрицательными.

Найдем явное выражение первого инварианта

$$I_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E} \cdot \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \cdot \nabla + \nabla \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Тогда уравнение ньютоновской вязкой жидкости принимает следующую альтернативную форму

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\eta \mathbf{d}. \quad (4.28)$$

Широкое распространение в гидродинамике имеет случай, когда объемная вязкость велика, т.е. такой случай, когда  $\lambda \rightarrow \infty$ . Чтобы проанализировать этот случай, перепишем уравнение (4.28) в следующей форме

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}, \quad (4.29)$$

где обозначено

$$p = -\lambda(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (4.30)$$

По своему механическому смыслу величина  $p$  представляет давление. Положим, что оно задано условиями нагружения и всегда оказывается конечным. Но ведь мы предположили, что  $\lambda \rightarrow \infty$ . Тогда из (4.30)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \rightarrow 0. \quad (4.31)$$

Чтобы понять, что это означает, обратимся к уравнению закона сохранения массы (2.14) из [7]

$$\dot{\rho} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

При условии (4.31) оно принимает следующий вид

$$\dot{\rho} = 0. \quad (4.32)$$

Это уравнение указывает на то, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  вязкая жидкость становится несжимаемой. Комбинируя равенства (4.29) и (4.32), приходим к следующей системе уравнений несжимаемой вязкой жидкости

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + 2\eta\mathbf{d}, \quad (4.33)$$

в которой  $p$  определяется условиями задачи и не зависит от кинематических параметров.

*Замечание 4.1.* Если подставить выражения (4.33) в уравнение динамики (2.46) из [7]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) = 0,$$

то получим знаменитое уравнение Навье – Стокса [3]

$$-\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \rho(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{v}}) = 0$$

или с учетом явного представления ускорения

$$-\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \rho\left(\mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{v})\right) = 0. \quad (4.34)$$

Это уравнение широко используется в гидродинамике несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости.

Рассмотрим теперь такой случай, когда гипотеза о несжимаемости сохраняется, но линеаризация не проводится. Тогда из (4.19) легко получим

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \text{Dev}\left(A_1\mathbf{D} + A_2\mathbf{D}^2\right)$$

или с учетом условия несжимаемости

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{d}$$

получим

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \text{Dev}\left(A_1\mathbf{d} + A_2\mathbf{d}^2\right).$$

Последнему уравнению можно придать другой вид. Для того, чтобы сделать это воспользуемся уравнением Кели – Гамильтона, записанным для тензора  $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}^3 + I_2 \mathbf{d} - I_3 \mathbf{E} = 0.$$

Умножим обе части этого уравнения на  $\mathbf{d}^{-1}$ . Получим уравнение

$$\mathbf{d}^2 + I_2 \mathbf{E} - I_3 \mathbf{d}^{-1} = 0,$$

из которого легко найдем

$$\mathbf{d}^2 = I_3 \mathbf{d}^{-1} - I_2 \mathbf{E}.$$

Таким образом, приходим к следующему модернизированному выражению для тензора напряжений в несжимаемом вязком материале

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \text{Dev}\left(A_1 \mathbf{d} + A_2 I_3 \mathbf{d}^{-1}\right). \quad (4.35)$$

В заключение этого раздела рассмотрим материал, обладающий сложными свойствами. Положим, что это сжимаемый ньютоновский теплопроводящий материал. Определяющие уравнения его запишем в следующей форме

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p(T, \rho)\mathbf{E} + \lambda \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\eta(T, \rho)\mathbf{d}, \\ \mathbf{h} = -\kappa(T, \rho)\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = \psi(T, \rho), \\ S = S(T, \rho), \end{cases} \quad (4.36)$$

где  $\rho$  — плотность, удовлетворяющая уравнению закона сохранения массы

$$\dot{\rho} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (4.37)$$

Очевидно, что уравнения (4.36) удовлетворяют принципу материальной объективности. Проанализируем его термодинамическую состоятельность. Для этого подставим выражения тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , вектора теплового потока  $\mathbf{h}$ , плотности свободной энергии  $\psi$  и плотности внутренней энтропии  $S$  в (4.15)

Вычислим отдельно каждое слагаемое

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} = -p(T, \rho)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \lambda(\mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{D})^2 + 2\eta \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{d}. \quad (4.38)$$

Из закона сохранения массы (4.37) найдем дивергенцию скорости

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

и подставим ее значение в (4.38). Тогда получим

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} = -p(T, \rho)\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \lambda(\mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{D})^2 + 2\eta \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{d}.$$

Далее, имеем

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \dot{\rho}.$$

Подстановка этих выражений в (4.15), приводит к следующему результату

$$\left( \frac{p}{\rho} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \dot{\rho} + 2\eta \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} + \lambda (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2 - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} + S \right) \dot{T} + \frac{\kappa}{T} \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0. \quad (4.39)$$

Условия неотрицательности этой суммы, стоящей в левой части, таковы

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial T} + S &= 0, \\ \lambda \geq 0, \quad \eta &\geq 0, \quad \kappa \geq 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Диссипативная функция  $\Phi$  имеет следующее представление

$$\Phi = 2\eta \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} + \lambda (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2 \geq 0. \quad (4.41)$$

Неравенство Фурье имеет вид

$$-\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} = \kappa \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0. \quad (4.42)$$

В силу (4.40) диссипативная функция неотрицательна; неравенство Фурье также выполняется тождественно в силу (4.40). Первое уравнение устанавливает связь функции давления  $p$  со свободной энергией

$$p = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (4.43)$$

Запишем в завершение уравнение первого закона термодинамики

$$C_\rho \dot{T} - \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\dot{\rho}}{\rho} = 2\eta \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} + \lambda (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^2 + b + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (4.44)$$

Диссипативная функция  $\Phi$  по (4.41) оказалась рядом с подводом тепла в объем  $b$ . Она определяет переход механической энергии в тепловую. Далее, в (4.44) появился коэффициент  $C_\rho$ . Это обозначение

$$C_\rho = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}. \quad (4.45)$$

По своему смыслу это теплоемкость при постоянной плотности. С ее помощью можно вычислить плотность внутренней энтропии так же, как это сделано в теории упругого материала

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT. \quad (4.46)$$

Как видно, это выражение удовлетворяет третьему закону термодинамики

$$S \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow 0.$$

#### 4.4. Анализ определяющего уравнения термовязкого материала

В этом разделе речь будет идти об определяющих уравнениях (4.13). Выше было сказано, что это определяющие уравнения изотропного материала. Это обстоятельство существенно упрощает процедуру их реального конструирования: в определяющие уравнения изотропного материала не входят никакие другие тензоры и векторы, кроме определяющих параметров и изотропных тензоров четного ранга. Последнее обстоятельство, между прочим, отвергает возможность появления векторных произведений в конструкции определяющих уравнений.

Начнем с представления вектора теплового потока

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{D})$$

из системы (4.13).

Буквально с подобной ситуацией мы уже встречались ранее в теории термоупругого материала: там вместо тензора  $\mathbf{D}$  стоял тензор  $\mathbf{F}$ . Заменяя  $\mathbf{F}$  на  $\mathbf{D}$  в (1.16), получим

$$\mathbf{h} = -(\kappa_0 \mathbf{E} + \kappa_1 \mathbf{D} + \kappa_2 \mathbf{D}^2) \cdot \mathbf{\Gamma}, \quad (4.47)$$

где  $\kappa_i$  — функции температуры, а также инвариантов и взаимных инвариантов тензора  $\mathbf{D}$  и вектора  $\mathbf{\Gamma}$

$$\kappa_i = \kappa_i(T, I_1, I_2, I_3, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{\Gamma}).$$

Действуя по аналогии, составим возможное представление тензора напряжений из (4.13)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{D}).$$

Так же, как и при конструировании вектора теплового потока (1.16), поставим вопрос так: из каких комбинаций вектора  $\mathbf{\Gamma}$  и тензора  $\mathbf{D}$  можно составить тензоры второго ранга? Очевидно, что это следующие тензоры



$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}, & \mathbf{D}, & \mathbf{D}^2, \\
 & \mathbf{E} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}), & \mathbf{D} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}), & \mathbf{D}^2 \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}), \\
 & \mathbf{E} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}, & \mathbf{D} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}, & \mathbf{D}^2 \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}, \\
 & \mathbf{E} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}^2, & \mathbf{D} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}^2, & \mathbf{D}^2 \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}^2.
 \end{aligned}$$

Более высокие степени тензора  $\mathbf{D}$  не следует включать в эту группу, потому что они могут быть вычислены через более низкие степени по теореме Кели – Гамильтона. Векторные произведения тоже не следует включать.

Умножая приведенные выражения тензоров второго ранга на скалярные множители, получим искомое представление тензора напряжений через тензор скоростей деформации и вектор градиента температуры  $\mathbf{\Gamma}$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} = & A_0 \mathbf{E} + A_1 \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2 + \\
 & + A_{00} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) + A_{01} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) + A_{02} \mathbf{D}^2 \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) + \\
 & + A_{10} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D} + A_{11} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D} + A_{12} \mathbf{D}^2 \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D} + \\
 & + A_{20} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}^2 + A_{21} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}^2 + A_{22} \mathbf{D}^2 \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{D}^2,
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

где все коэффициенты  $A_k$  и  $A_{ki}$  зависят от температуры, инвариантов тензора  $\mathbf{D}$  и вектора  $\mathbf{\Gamma}$  и их взаимных инвариантов

$$\begin{aligned}
 A_k &= A_k(T, I_1, I_2, I_3, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{\Gamma}), \\
 A_{ki} &= A_{ki}(T, I_1, I_2, I_3, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{\Gamma}).
 \end{aligned}$$

Чтобы представление (4.48) было бы симметричным тензором, необходимо наложить на его коэффициенты следующие ограничения

$$A_{10} = A_{01}, \quad A_{20} = A_{02}, \quad A_{21} = A_{12}. \tag{4.49}$$

Итак, получены представления тензора напряжений и вектора теплового потока, как функций своих аргументов.

Выясним теперь условия, при которых определяющие уравнения термовязкого материала удовлетворяют универсальному диссипативному неравенству. Для этого подставим (4.13) в (4.15). Получим следующее неравенство

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} + S \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{D}} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0.$$

Замечаем, что  $\dot{T}$ ,  $\dot{\Gamma}$  и  $\dot{\mathbf{D}}$  входят линейно. По теореме о линейных неравенствах коэффициенты при них должны обратиться в нуль, а свободный член должен быть неотрицателен

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} + S = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} = 0,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \Gamma \geq 0. \quad (4.50)$$

Из первой строчки этих условий получаем, что свободная энергия и плотность внутренней энтропии зависят только от температуры

$$\psi = \psi(T), \quad S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = S(T).$$

Вторая же строчка не позволяет выделить по отдельности ни диссипативное неравенство  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \geq 0$ , ни неравенство Фурье  $\mathbf{h} \cdot \Gamma \leq 0$ . Подставив (4.47) и (4.48) в (4.50), получим одно универсальное неравенство, объединяющее и диссипативное неравенство, и неравенство Фурье

$$\begin{aligned} & A_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + A_1 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{D} + \\ & + A_{00} (\mathbf{E} \cdot (\Gamma \Gamma)) \cdot \mathbf{D} + A_{01} (\mathbf{D} \cdot (\Gamma \Gamma)) \cdot \mathbf{D} + A_{02} (\mathbf{D}^2 \cdot (\Gamma \Gamma)) \cdot \mathbf{D} + \\ & + A_{10} (\mathbf{E} \cdot (\Gamma \Gamma) \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + A_{11} (\mathbf{D} \cdot (\Gamma \Gamma) \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + \\ & + A_{12} (\mathbf{D}^2 \cdot (\Gamma \Gamma) \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{D} + A_{20} (\mathbf{E} \cdot (\Gamma \Gamma) \cdot \mathbf{D}^2) \cdot \mathbf{D} + \\ & + A_{21} (\mathbf{D} \cdot (\Gamma \Gamma) \cdot \mathbf{D}^2) \cdot \mathbf{D} + (A_{22} \mathbf{D}^2 \cdot (\Gamma \Gamma) \cdot \mathbf{D}^2) \cdot \mathbf{D} + \\ & + \frac{1}{T} \Gamma \cdot (\kappa_0 \mathbf{E} + \kappa_1 \mathbf{D} + \kappa_2 \mathbf{D}^2) \cdot \Gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Правила тензорной алгебры позволяют преобразовать это неравенство к более удобному и наглядному виду. Главное в этом преобразовании — это преобразование каждой большой скобки. Обращаю внимание на то, что в каждой большой скобке стоит, по существу, диада. Двойное скалярное произведение этой диады на тензор  $\mathbf{D}$  равно произведению тензора  $\mathbf{D}$  на векторы названных диад справа и слева. Продемонстрирую выполнение сформулированной программы вычислений на примере первой и последней скобок

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \mathbf{D} &= ((\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \boldsymbol{\Gamma}) \cdot \mathbf{D} = (\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Gamma}, \\ (\mathbf{D}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2) \cdot \mathbf{D} &= ((\mathbf{D}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma}) (\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2)) \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma} = \\ &= \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^5 \cdot \boldsymbol{\Gamma}. \end{aligned}$$

Преобразуя все скобки в (4.51), приведем его к следующему виду

$$\begin{aligned} &A_0 \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + A_1 \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + A_2 \mathbf{D}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{\kappa_0}{T} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \\ &+ \left( \frac{\kappa_1}{T} + A_{00} \right) \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \left( \frac{\kappa_2}{T} + A_{01} + A_{10} \right) \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \\ &+ (A_{02} + A_{20} + A_{11}) \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^3 \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \\ &+ (A_{21} + A_{12}) \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^4 \cdot \boldsymbol{\Gamma} + A_{22} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^5 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Без конкретизации представления входящих сюда коэффициентов через инварианты и взаимные инварианты тензора  $\mathbf{D}$  и вектора  $\boldsymbol{\Gamma}$  невозможно сформулировать условия и необходимые, и достаточные для его выполнения. Но даже если иметь эти представления, трудно найти соответствующие условия.

Мы пришли в тупик и не можем даже ответить на важный вопрос: выполняется ли неравенство Фурье

$$\frac{1}{T} (\kappa_0 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \kappa_1 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \kappa_2 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \geq 0, \quad (4.53)$$

если (4.52) выполнено.

По видимому может быть по-всякому.

Рассмотрим некоторые частные ситуации.

1. Пусть, например, все коэффициенты  $A_k$  и  $A_{kl}$  кроме  $A_1$  равны нулю, и пусть коэффициенты  $\kappa_k$  кроме  $\kappa_0$  тоже равны нулю. Тогда неравенство (4.52) примет следующий вид

$$A_1 \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Gamma} + \frac{\kappa_0}{T} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0.$$

Поскольку  $\mathbf{D}$  и  $\boldsymbol{\Gamma}$  — независимые величины, условиями его выполнения являются следующие неравенства

$$A_1 \geq 0, \quad \kappa_0 \geq 0. \quad (4.54)$$

Неравенство Фурье (4.53) в этом случае принимает вид

$$\frac{1}{T} \kappa_0 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0$$

и, как следует из условий (4.54), выполняется тождественно.

2. Пусть теперь все коэффициенты кроме  $A_{01}$ ,  $A_{10}$  и  $\kappa_2$  равны нулю. Тогда неравенство (4.52) примет следующий вид

$$\left( \frac{\kappa_2}{T} + A_{01} + A_{10} \right) \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0. \quad (4.55)$$

Произведение  $\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{\Gamma}$  положительно, поскольку  $\mathbf{D}^2$  — положительный тензор, поэтому условие выполнения (4.55) таково

$$\frac{\kappa_2}{T} + A_{01} + A_{10} \geq 0$$

или

$$\frac{\kappa_2}{T} \geq -A_{01} - A_{10}. \quad (4.56)$$

Если коэффициенты  $A_{01}$  и  $A_{10}$  отрицательны, то в правой части (4.56) стоит положительная величина, так что

$$\frac{\kappa_2}{T} \geq |A_{01} + A_{10}|.$$

В этом случае неравенство Фурье

$$\frac{\kappa_2}{T} \geq 0 \quad (4.57)$$

выполняется.

А если эти коэффициенты положительны, то неравенство (4.56) принимает вид

$$\frac{\kappa_2}{T} \geq -|A_{01} + A_{10}|.$$

Оно допускает возможность отрицательных значений  $\kappa_2$ , и тогда неравенство Фурье (4.57) не выполнится при выполнении универсального диссипативного неравенства (4.52).

Рассмотренный пример еще раз демонстрирует, что при выполнении второго закона термодинамики неравенство Фурье может и не выполняться. Причина этого — наличие движения деформируемого тела. Действительно, если движение отсутствует, т.е. если  $\mathbf{D} = 0$ , то неравенство Фурье (4.53) выполняется при выполнении второго закона термодинамики (4.52).

## **5. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

### **5.1. Особенности поведения пластических материалов**

Пластичность — важнейшее свойство металлов. Именно благодаря пластичности металлические конструкции находят широкое применение в технике. Трудно себе представить что было бы, если бы инженерам пришлось сооружать конструкции из стекла. Неосторожные удары быстро приводили бы стеклянные конструкции к разрушению. А вот металлические конструкции переносят эти удары легко, а говоря точнее, не разрушаются. Почему? Ведь по соображениям здравого смысла разрушается и стекло и металл. Чем же тогда объяснить упомянутое выше различие в их поведении при ударах? Объяснение состоит в том, что процесс разрушения происходит по-разному. Стеклянная конструкция является хрупкой и разрушается сразу, как только максимальное растягивающее напряжение достигает критической величины — предела прочности. Металлическая конструкция является пластической, и начало разрушения тоже происходит тогда, когда напряжения достигают критической величины — в этом случае это величина предела текучести. Однако, в этом случае разрушения, понимаемого как разделение конструкции на части не происходит. В малой окрестности точки удара происходят так называемые «пластические деформации». Однако, они охватывают лишь малую область и не распространяются на всю конструкцию. Поэтому она продолжает функционировать, несмотря на наличие пластической деформации.

Следует обратить внимание на еще одну особенность поведения металлических конструкций. Дело в том, что в металлических конструкциях разрушение происходит при больших растягивающих напряжениях, тогда как стекло и другие материалы, используемые в строительстве хорошо работают только при сжатии.

Заслуживает внимание еще одна особенность в поведении пластических конструкций под нагрузкой. Даже если в окрестности некоторой точки напряжения достигают критической величины, то в

окрестности этой точки, несомненно, произойдет пластическая деформация. Последняя приведет к тому, что напряжения перераспределятся, и разрушение не произойдет вообще! Конструкция может продолжать функционировать и при наличии умеренных пластических деформаций. Действительное разрушение конструкции, понимаемое как разделение ее на части, при дальнейшем увеличении нагрузки произойдет лишь потом, когда пластические деформации охватят большую часть конструкции. В этом случае говорят, что конструкция исчерпала свою несущую способность.

В этой главе мы отвлечемся от разнообразных усложняющих обстоятельств, таких как кинематическое упрочнение, эффект Баушингера, принцип Мазинга, и будем рассматривать только идеальную модель пластического материала. Три обстоятельства характерны для этой модели.

1. Переход в пластическое состояние не зависит от умеренного гидростатического давления.

2. Величина предела текучести и при растяжении, и при сжатии одна и та же.

3. При пластической деформации отсутствует изменение объема.

4. Напряжения не зависят от скорости деформации.

Эти же особенности подтверждены большим количеством экспериментов с мягкими сталями и иными металлами.

## 5.2. Условие текучести.

Полагаем, что пластическая деформация начинается только тогда, когда некоторая скалярная функция тензора напряжений достигает некоторого критического значения. Если материал изотропен, то эта скалярная функция зависит только от инвариантов тензора напряжений и температуры, так что условие текучести можно записать так

$$f(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}) = \tau_s(T),$$

где  $\tau_s$  — предел текучести. Допускаем, что он может зависеть от температуры.

Многочисленные экспериментальные факты свидетельствуют о том, что умеренное гидростатическое давление или растяжение не влияют в

первом приближении на условие перехода материала в пластическое состояние. Это позволяет считать, что факт такого перехода определяется не полным тензором напряжений  $\sigma$ , а только его девиаторной частью  $\mathbf{s}$ , так что условие текучести можно записать более просто, а именно

$$f(I_{2s}, I_{3s}) = \tau_s(T). \quad (5.1)$$

Первый инвариант девиатора напряжений в это условие не входит, поскольку он просто равен нулю.

Функция  $f$  обладает всеми свойствами нормы девиатора напряжений. Полагаем, что когда она мала, то пластических деформаций нет. Далее, вместе с увеличением координат девиатора она увеличивается и, наконец, когда-то достигает значения  $\tau_s$ . При дальнейшем увеличении координат девиатора она может продолжать увеличиваться. Таким образом, в качестве функции  $f$  можно использовать норму девиатора  $N$ , т.е. принять

$$f(I_{2s}, I_{3s}) = N(\mathbf{s}). \quad (5.2)$$

Используя термин «норма», можно высказать следующее правдоподобное суждение. Когда норма девиатора  $\mathbf{s}$  меньше предела текучести, то пластические деформации не происходят. Они начинаются, когда норма девиатора достигает значения  $\tau_s$ . Случай, когда норма превосходит предел текучести, не достижим никогда.

Из определения (5.2) видно, что норма может быть сконструирована с использованием инвариантов девиатора напряжений. Поскольку их два, то в этом кроется возможность неединственности выбора нормы даже для одного какого-то материала. Естественно, что та норма лучше, которая лучше соответствует экспериментальным данным, полученным для каждого конкретного материала.

Норма, как математический объект, обладает целым рядом известных важных свойств.

1. Норма девиатора напряжений  $\mathbf{s}$  всегда положительна, если только сам девиатор отличен от нуля, т.е.

$$N(\mathbf{s}) > 0, \quad \mathbf{s} \neq 0. \quad (5.3)$$

2. Норма обращается в нуль только тогда, когда ее аргумент  $\mathbf{s}$  равен нулю, т.е.

$$N(\mathbf{s}) = 0 \quad \text{только при} \quad \mathbf{s} = 0. \quad (5.4)$$

3. Если аргумент нормы представляет произведение  $\mathbf{s}$  и скалярного вещественного множителя, то норма приобретает множитель  $|\alpha|$ , т.е.

$$N(\alpha \mathbf{s}) = |\alpha| N(\mathbf{s}). \quad (5.5)$$

4. Норма удовлетворяет так называемому «неравенству треугольника»

$$N(\mathbf{s} + \mathbf{t}) \leq N(\mathbf{s}) + N(\mathbf{t}). \quad (5.6)$$

С физической точки зрения норма девиатора  $\mathbf{s}$  характеризует наибольшие по величине координаты этого девиатора.

Обращаю внимание читателя на тот факт, что норма девиатора существенно отличается от нормы самого тензора. Она не чувствительна к величине первого инварианта тензора напряжений, тогда как норма самого тензора чувствительна к этой величине.

В научной и инженерной литературе широко используются две самые популярные нормы — норма Мизеса и норма Сен-Венана – Треска.

Норма Мизеса определяется следующей формулой

$$N(\mathbf{s}) = M(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}. \quad (5.7)$$

Здесь под корнем оказался модуль второго инварианта девиатора напряжений, так что можно написать иначе

$$M(\mathbf{s}) = \sqrt{|I_{2s}|} = \tau, \quad (5.8)$$

где  $\tau$  — интенсивность касательных напряжений.

Таким образом, можно сказать еще и так: норма Мизеса равна интенсивности касательных напряжений

Норма Сен-Венана – Треска определяется следующим образом

$$N(\mathbf{s}) = T(\mathbf{s}) = \text{Max} \left[ \left| \frac{s_1 - s_2}{2} \right|, \left| \frac{s_2 - s_3}{2} \right|, \left| \frac{s_3 - s_1}{2} \right| \right], \quad (5.9)$$

причем  $s_1, s_2, s_3$  — главные значения девиатора  $\mathbf{s}$ .

В скобке здесь стоят касательные напряжения. Таким образом, можно сказать так: норма Сен-Венана – Треска равна максимальному касательному напряжению.

Легко проверить, что норма Мизеса удовлетворяет уравнениям (5.3), (5.4), (5.5) и даже (5.6), так что она действительно обладает всеми свойствами нормы.



Обратимся теперь к норме Сен-Венана – Треска. Очень легко убедиться, что она удовлетворяет первому и третьему требованиям, накладываемым на норму. При доказательстве того факта, что норма удовлетворяет третьему свойству, возникает легкое затруднение. Действительно, из формулы (5.9) следует, что норма  $T$  обращается в нуль при

$$s_1 = s_2 = s_3, \quad (5.10)$$

т.е. при равных, но отличных от нуля главных значениях девиатора.

Это затруднение легко преодолевается напоминанием о том, что первый инвариант девиатора всегда равен нулю, т.е.

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0. \quad (5.11)$$

Подставив (5.10) в (5.11), получаем, что все главные значения девиатора равны нулю

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0.$$

Остается высказать суждение: тензор, у которого главные значения равны нулю, сам представляет собой нулевой тензор.

Таким образом, мы убедились в том, что норма Сен-Венана – Треска удовлетворяет третьему ограничению на выбор нормы. Что касается соответствия четвертому свойству нормы, оставляем его без обсуждения.

### 5.3. Сравнение норм, используемых в теории пластичности

Несмотря на то, что нормы Мизеса и Сен-Венана –Треска имеют пугающе различный вид, для каждого из различных напряженных состояний они дают приблизительно одинаковые значения. Мы не будем доказывать это утверждение в общем виде. Удовлетворимся проверкой для некоторых характерных напряженных состояний.

#### 1. Всестороннее изотропное растяжение

Тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = E \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.12)$$

Он является шаровым. Поэтому девиатор равен нулю, т.е.

$$\mathbf{s} = 0, \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0. \quad (5.13)$$

Оказывается, что при этом обе нормы равны нулю, т.е.

$$M = T = 0.$$

Поскольку условие текучести никогда не может быть достигнуто, пластические деформации при этом напряженном состоянии не возникают.

### 2. Чистый срез в плоскости $x_1ox_2$

Тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)\sigma_{12}. \quad (5.14)$$

Шаровая часть этого тензора равна нулю, так что имеем

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)\sigma_{12}.$$

В главном базисе  $\mathbf{e}_{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_{(2)}$ ,  $\mathbf{e}_{(3)}$  этот тензор имеет представление

$$\mathbf{s} = (\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} - \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)})\sigma_{12}.$$

Отсюда видно, что главные значения девиатора напряжений таковы

$$s_1 = \sigma_{12}, \quad s_2 = -\sigma_{12}, \quad s_3 = 0.$$

Норма Мизеса равна следующей величине

$$M = \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{12}^2)} = |\sigma_{12}|. \quad (5.15)$$

Норма Сен-Венана – Треска выражается по формуле (5.9) и имеет следующее значение

$$T = \text{Max} \left[ \left| \frac{\sigma_{12} + \sigma_{12}}{2} \right|, \left| \frac{-\sigma_{12} - 0}{2} \right|, \left| \frac{0 - \sigma_{12}}{2} \right| \right] = |\sigma_{12}|. \quad (5.16)$$

Итак, числовые значения норм  $M$  и  $T$  и в этом случае совпали. В обоих случаях условие текучести принимает вид

$$|\sigma_{12}| = \tau_s. \quad (5.17)$$

С помощью этого уравнения можно выявить механический смысл предела текучести  $\tau_s$ : предел текучести  $\tau_s$  равен модулю такого касательного напряжения, при котором появляются пластические деформации при чистом срезе.

### 3. Одноосное растяжение-сжатие

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1\sigma_{11}.$$

Шаровая часть этого тензора имеет следующее выражение

$$\frac{\sigma_{11}}{3}\mathbf{E},$$

так что девиатор имеет представление

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{\sigma_{11}}{3} \mathbf{E} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 \sigma_{11} - \frac{\sigma_{11}}{3} (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3) = \\ &= \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 \frac{2}{3} \sigma_{11} - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \frac{\sigma_{11}}{3} - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \frac{\sigma_{11}}{3}.\end{aligned}$$

Отсюда легко находим главные значения девиатора напряжений  $\mathbf{s}$

$$s_1 = \frac{2}{3} \sigma_{11}, \quad s_2 = -\frac{\sigma_{11}}{3}, \quad s_3 = -\frac{\sigma_{11}}{3}.$$

С помощью этих значений легко находим обе нормы девиатора напряжений

$$M = \tau = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{4}{9} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{9} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{9} \sigma_{11}^2 \right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_{11}| = 0,557 |\sigma_{11}|, \quad (5.18)$$

$$T = \text{Max} \left[ \left| \frac{\frac{2}{3} \sigma_{11} + \frac{1}{3} \sigma_{11}}{2} \right|, \left| \frac{-\frac{1}{3} \sigma_{11} + \frac{1}{3} \sigma_{11}}{2} \right|, \left| \frac{-\frac{1}{3} \sigma_{11} - \frac{2}{3} \sigma_{11}}{2} \right| \right] = 0,5 |\sigma_{11}|. \quad (5.19)$$

Наконец-то получились разные значения норм! Однако, это различие невелико: всего 11%. В теории пластичности этим различием пренебрегают. Более того, экспериментальные результаты располагаются обычно посередине между найденными крайними значениями. Так что, экспериментальные результаты одинаково хорошо подтверждают и (5.18) и (5.19).

#### 4. Двухосное изотропное растяжение

Тензор напряжений в этом случае таков

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) \sigma_{11}. \quad (5.20)$$

Шаровая часть этого тензора имеет следующее значение

$$\frac{2\sigma_{11}}{3} \mathbf{E},$$

так что для девиатора находим представление

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{2\sigma_{11}}{3} \mathbf{E} = (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2) \sigma_{11} - \frac{2\sigma_{11}}{3} (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3) = \\ &= \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 \frac{\sigma_{11}}{3} + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \frac{\sigma_{11}}{3} - \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \frac{2\sigma_{11}}{3}.\end{aligned}$$

Это выражение показывает, что орты  $\mathbf{i}_k$  представляют главный базис девиатора напряжений, так что его главные значения имеют следующие выражения

$$s_1 = \frac{\sigma_{11}}{3}, \quad s_2 = \frac{\sigma_{11}}{3}, \quad s_3 = -\frac{2\sigma_{11}}{3}.$$

Вычисление норм Мизеса и Сен-Венана – Треска дает почти одинаковые результаты

$$M = \tau = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{11}^2}{9} + \frac{\sigma_{11}^2}{9} + \frac{4\sigma_{11}^2}{9} \right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_{11}| = 0,557 |\sigma_{11}|, \quad (5.21)$$

$$T = \text{Max} \left[ \left| \frac{\frac{1}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{11}}{2} \right|, \left| \frac{\frac{1}{3}\sigma_{11} + \frac{2}{3}\sigma_{11}}{2} \right|, \left| \frac{-\frac{2}{3}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{11}}{2} \right| \right] = 0,5 |\sigma_{11}|.$$

Опять-таки, различие между значениями норм составляет 11%.

Подводя итог проделанным в этом разделе вычислениям, мы отметим, что обнаруженные отличия являются максимальными. Для других напряженных состояний они меньше. Поэтому различием между значениями норм Мизеса и Сен-Венана – Треска пренебрегают.

Приведу краткую историческую справку об условиях текучести. Исторически первым было условие текучести Сен-Венана – Треска. Открыл его французский инженер Треска в 1864 году, Сен-Венан применял это условие в своих теоретических исследованиях. Мизес считал условие Треска точным и стал разыскивать такое приближенное условие текучести, которое было бы более удобным при теоретических исследованиях. Главной проблемой здесь было наличие неаналитических нелинейностей. Он пытался найти такое условие, в котором не было бы таких нелинейностей. В 1913 году он предложил критерий текучести

$$M(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = \tau_s, \quad (5.22)$$

и сам считал его приближенным условием текучести.

Однако, впоследствии выяснилось, что для многих металлов условие текучести (5.22) лучше соответствует экспериментальным наблюдениям. Так условие текучести (5.22) приобрело самостоятельное значение и получило название «условие текучести Мизеса».

Вместе с тем, условие текучести Сен-Венана – Треска

$$T = \text{Max} \left[ \left| \frac{s_1 - s_2}{2} \right|, \left| \frac{s_2 - s_3}{2} \right|, \left| \frac{s_3 - s_1}{2} \right| \right] = \tau_2 \quad (5.23)$$

лучше соответствовало экспериментальным результатам для некоторых металлов.

Все сказанное позволяет считать условие текучести Мизеса и Сен-Венана – Треска равноправными формулировками условия текучести.

#### 5.4. Уравнения пластического течения

В этом разделе нам предстоит формально записать то, что уже было высказано в предыдущем. А там было высказано два суждения. Первое из них такое: если

$$N(\mathbf{s}) < \tau_s, \quad (5.24)$$

то пластических деформаций не происходит.

Как записать формально то, что пластических деформаций не происходит? Было бы неправильно сказать, что при этом пластическая деформация равна нулю. Ведь пластическая деформация могла произойти на предыдущем этапе деформирования, когда условие текучести

$$N(\mathbf{s}) = \tau_s \quad (5.25)$$

было выполнено.

Следовательно, нужно перефразировать высказанное выше суждение: при выполнении условия отсутствия текучести (5.24) уже достигнутая деформация не изменяется. Так что, деформация есть, но она не изменяется. Вспомним то, что изменение деформации определяет тензор скоростей деформации  $\mathbf{D}$ . Так что, факт неизменности деформации следует записать, обращая  $\mathbf{D}$  в нуль, т.е.

$$\mathbf{D} = 0. \quad (5.26)$$

Можно упростить это условие, если учесть, что пластический материал вообще несжимаем. В этом случае условие (5.26) следует заменить на условие обращения в нуль дивергента тензора скоростей деформации  $\mathbf{d}$ , т.е. написать

$$\mathbf{d} = 0. \quad (5.27)$$

А теперь нужно отдать дань общей теории определяющих уравнений. А в ней первичным является процесс деформирования, и напряжения являются вторичным фактом: они зависят от процесса деформирования. Таким образом, нам нужно формально выразить следующее суждение: если пластическая деформация не изменяется, то дивергент напряжений имеет произвольное значение, но только удовлетворяющее условию (5.25). Записывается высказанное суждение следующим образом

$$\mathbf{d} = 0, \quad N(\mathbf{s}) < \tau_s. \quad (5.28)$$

Теперь следует как-то формализовать понятие «пластическое течение», т.е. случай  $\mathbf{d} \neq 0$ . Оно начинается и продолжается при выполнении условия текучести (5.25). Предположим, что это течение происходит по закону течения вязкой жидкости. Учтем также, что пластическая деформация происходит без изменения объема. Учитывая это, возьмем сначала самое простое уравнение несжимаемой вязкой жидкости (4.29)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + 2\eta\mathbf{d}.$$

Девiator напряжений имеет простой вид

$$\mathbf{s} = 2\eta\mathbf{d}. \quad (5.29)$$

А теперь вспомним, что пластическое течение происходит только при выполнении условия текучести (5.25). Воспользовавшись этим, подставим (5.29) в (5.25). Тогда, с учетом (5.5), получим следующее уравнение

$$2\eta N(\mathbf{d}) = \tau_s. \quad (5.30)$$

Оно выполняется только при одном значении  $N(\mathbf{d})$ . Но ведь норма тензора скоростей пластической деформации может быть разной! Что же делать? Придется предположить, что величина  $\eta$  в (5.29) — это не вязкость, а некоторый произвольный множитель, и его найдем из условия выполнения (5.30), так что

$$2\eta = \frac{\tau_s}{N(\mathbf{d})}. \quad (5.31)$$

Подставив (5.31) в (5.29), получим уравнение пластического течения

$$\mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d}}{N(\mathbf{d})}. \quad (5.32)$$

Обращаю внимание на важные обстоятельства. Увеличение тензора скоростей деформации в  $N$  раз приводит к увеличению нормы его тоже в  $N$  раз и, в результате, не приведет к изменению девиатора тензора напряжений. Этот факт находится в полном соответствии с отмеченными выше особенностями пластической деформации.

Опять отдадим дань общей теории определяющих уравнений, в которой первичным является процесс деформирования, а напряжения есть следствие этого деформирования. Это заставляет записать следующее свойство пластического деформирования

$$\mathbf{d} \neq 0, \quad \mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d}}{N(\mathbf{d})}. \quad (5.33)$$

Объединяя (5.33) с (5.28), получим окончательно

$$\left[ \begin{array}{l} \mathbf{d} = 0, \quad N(\mathbf{s}) < \tau_s, \\ \mathbf{d} \neq 0, \quad \mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d}}{N(\mathbf{d})}. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

Напоминаю, что здесь символ квадратной скобки означает не «и ... и», а «или ... или».

Понимать (5.34) нужно следующим образом: скорость пластической деформации может быть либо нулевой ( $\mathbf{d} = 0$ ), либо отличной от нуля ( $\mathbf{d} \neq 0$ ); в первом случае девиатор напряжений принимает произвольное значение, удовлетворяющее условию (5.24), а во втором — значение (5.32).

Итак, уравнение (5.34) определяет девиатор напряжений. Чтобы получить полный тензор напряжений несжимаемого материала, необходимо добавить слагаемое с давлением, т.е. написать

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \mathbf{s}. \quad (5.35)$$

Таким образом, мы составили только первое уравнение из полной системы четырех уравнений. Добавим остальные. Уравнение теплопроводности возьмем в стандартной форме (4.14) при условии (4.18)

$$\mathbf{h} = 0. \quad (5.36)$$

Можно было бы взять по аналогии с (4.14) и плотность свободной энергии, и плотность внутренней энтропии

$$\psi = \psi(T), \quad S = S(T). \quad (5.37)$$

Однако от такого образа действий останавливает следующее соображение. Нельзя безоговорочно принять аналогию со случаем вязкой жидкости. Дело в том, что эта аналогия не полная. Течение жидкости никак не изменяет ее структуры. Поэтому для жидкости вполне резонно принять (5.37), как это следует из (4.14). Вместе с тем, пластическое тело является твердым телом и, значит, имеет какую-то структуру. Легко поверить, что при пластической деформации эта структура разрушается. А всякое разрушение требует энергетических затрат. В предположении (5.37) такие затраты не приняты во внимание, и это соображение приводит к необходимости модернизировать уравнения (5.37). Добавим к ним

слагаемые, описывающие энергетически указанное выше разрушение структуры пластического материала

$$\psi = f(T) + \psi_p, \quad S = S(T) + S_p. \quad (5.38)$$

Введем правдоподобное предположение о том, что разрушение может только прогрессировать и никогда не может уменьшаться. Это значит, что материал не может залечиваться. Далее, это значит, что  $\dot{\psi}_p$  и  $\dot{S}_p$  принимают только неотрицательные значения. А что является, бесспорно, неотрицательным в механике деформируемых тел? Ответ прост и убедителен — это левая часть универсального диссипативного неравенства — так что, мы вынуждены написать следующие уравнения

$$\dot{\psi}_p = \alpha \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right), \quad (5.39)$$

$$\dot{S}_p = \beta \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right). \quad (5.40)$$

Таким образом, мы пришли к следующей системе определяющих уравнений несжимаемого пластического материала

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \mathbf{s}, \\ \mathbf{h} = 0, \\ \psi = f(T) + \psi_p, \\ S = S(T) + S_p, \end{cases} \quad (5.41)$$

в котором девиатор напряжений  $\mathbf{s}$  описывается уравнением (5.34). Из второго уравнения (5.41) следует, что последние слагаемые в (5.39) и (5.40) обращаются в нуль, а все, что остается, представляет собой диссипативную функцию  $\Phi$

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T}, \quad (5.42)$$

так что, уравнения (5.39) и (5.40) можно переписать следующим образом

$$\dot{\psi}_p = \alpha \Phi, \quad \dot{S}_p = \beta \Phi. \quad (5.43)$$

Подставим выражения (5.41) и (5.43) в выражение диссипативной функции (5.42) и учтем условие несжимаемости. Все это приводит к уравнению

$$\Phi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} - \rho_0 \dot{f}(T) - \rho_0 \alpha \Phi - \rho_0 (S(T) + S_p) \dot{T}.$$

Отсюда находим выражение диссипативной функции



$$\Phi = \frac{1}{1 + \rho_0 \alpha} \left( \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{d}} - \rho_0 \dot{f}(T) - \rho_0 (S(T) + S_p) \dot{T} \right). \quad (5.44)$$

Универсальное диссипативное неравенство для определяющих уравнений (5.41) сводится к требованию неотрицательности  $\Phi$ , т.е. к условию

$$\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{d}} - \rho_0 \left( \frac{\partial f(T)}{\partial T} + S(T) + S_p \right) \dot{T} \geq 0.$$

Используя теорию линейных неравенств, получаем необходимые и достаточные условия его выполнения

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T} + S(T) + S_p = 0, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{d}} \geq 0. \quad (5.46)$$

Обратимся теперь к уравнению (5.34). Если  $\mathbf{d} = 0$ , то условие (5.34) выполняется со знаком равенства. Если  $\mathbf{d} \neq 0$ , то  $\mathbf{s}$  определяется второй строчкой (5.34), и тогда условие (5.46) принимает следующий вид

$$\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{d}} = \tau_s \frac{\mathbf{d} \cdot \dot{\mathbf{d}}}{N(\mathbf{d})} \geq 0$$

или

$$\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{d}} = 2\tau_s N(\mathbf{d}) \geq 0, \quad (5.47)$$

которое очевидно выполняется со знаком неравенства.

Таким образом, при  $\mathbf{d} \neq 0$  всякие процессы в пластическом материале необратимы, а при  $\mathbf{d} = 0$  — обратимы.

Обратимся теперь к уравнению (5.45). Его вид является достаточным основанием, чтобы принять предположение о том, что  $S_p = 0$ . Тогда из него находим

$$S(T) = -\frac{\partial f(T)}{\partial T}. \quad (5.48)$$

Обратимся теперь к дифференциальному уравнению первого закона термодинамики, т.е. к уравнению теплопроводности. Оно имеет вид

$$\rho_0 T \dot{S} = \Phi + b - \frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{h}).$$

С учетом (5.44), (5.47) и (5.41) находим, что оно принимает вид

$$\rho_0 T \dot{S} = \frac{1}{1 + \rho_0 \alpha} 2\tau_s N(\mathbf{d}) + b. \quad (5.49)$$

Слагаемое, стоящее рядом с « $b$ » представляет собой тепло, образовавшееся за счет диссипации механической энергии. При  $\alpha = 0$  оно равно мощности напряжений на пластических деформациях. При  $\alpha > 1$  — оно меньше. Почему? Как следует из приведенных рассуждений, это происходит потому, что часть этой мощности, в соответствии с (5.44), уходит на разрушение структуры пластического материала. При  $\alpha \rightarrow \infty$  вся мощность механических напряжений уходит на разрушение и ничего — на разогрев.

Все сказанное выглядит весьма правдоподобно. Вместе с тем, остается некоторая неудовлетворенность проведенными рассуждениями и полученными выводами. Все дело в том, что мы использовали при своих построениях простейшее уравнение для описания вязкости — уравнение (4.29). Рассмотрим более сложное, а значит и более точное, уравнение вязкого течения (4.35). С его помощью находим выражение девиатора напряжений

$$\mathbf{s} = A_1 \text{Dev}(\mathbf{d} + A\mathbf{d}^{-1}), \quad (5.50)$$

где обозначено

$$A = \frac{A_2 I_3}{A_1}.$$

Как и ранее, множитель  $A_1$  найдем из условия текучести (5.25). В результате выражение для девиатора напряжений принимает следующий вид

$$\mathbf{s} = \tau_s \frac{\text{Dev}(\mathbf{d} + A\mathbf{d}^{-1})}{N(\text{Dev}(\mathbf{d} + A\mathbf{d}^{-1}))}$$

или

$$\mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d} + A \text{Dev} \mathbf{d}^{-1}}{N(\mathbf{d} + A \text{Dev} \mathbf{d}^{-1})}. \quad (5.51)$$

Запишем теперь аналог определяющего уравнения (5.34), т.е.

$$\left[ \begin{array}{ll} \mathbf{d} = 0, & N(\mathbf{s}) < \tau_s, \\ \mathbf{d} \neq 0, & \mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d} + A \text{Dev} \mathbf{d}^{-1}}{N(\mathbf{d} + A \text{Dev} \mathbf{d}^{-1})}. \end{array} \right. \quad (5.52)$$

Приведем в заключение выражение универсального диссипативного неравенства и уравнение теплопроводности для определяющего уравнения (5.52) при  $\mathbf{d} \neq 0$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = \tau_s \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} + 3A}{N(\mathbf{d} + A \text{Dev} \mathbf{d}^{-1})} \geq 0, \quad (5.53)$$

$$\rho_0 T \dot{S} = \frac{\tau_s}{1 + \rho_0 \alpha} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} + 3A}{N(\mathbf{d} + A \text{Dev} \mathbf{d}^{-1})} + b \quad (5.54)$$

### 5.5. Определяющие уравнения термопластического материала

Этот раздел посвящен неблагодарной задаче — приспособить определяющие уравнения термовязкого материала из раздела 4.4 к описанию пластического течения. В отличие от предыдущего раздела предполагается учесть влияние градиента температуры на тензор напряжений и влияние движения на вектор теплового потока. На примере термовязкого материала мы убедились, что это намерение привело к безумно сложным уравнениям и неравенствам. Следует ожидать того, что в случае термопластического материала все окажется еще сложнее. Однако, полагаю, что следует проделать соответствующие вычисления, чтобы увидеть все возникающие сложности, и чтобы никогда больше не появлялось желания использовать получающиеся уравнения в инженерных расчетах.

В соответствии с рассуждениями, приведенными выше нам предстоит приспособить уравнения раздела 4.4 к описанию пластического течения. Во-первых, следует учесть тот факт, что пластическое течение происходит без изменения объема. Это значит, что во всех формулах раздела 4.4 следует положить

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}.$$

Учитывая это, запишем выражение девиатора напряжений с использованием уравнения (4.48)

$$\mathbf{s} = A_1 \Phi(\mathbf{d}, \Gamma). \quad (5.55)$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{d}, \Gamma) = & Dev\left(\mathbf{d} + \overline{A_2} \mathbf{d}^2 + \right. \\ & + \overline{A_{00}} \mathbf{E} \cdot \Gamma \Gamma + \overline{A_{01}} \mathbf{d} \cdot \Gamma \Gamma + \overline{A_{02}} \mathbf{d}^2 \cdot \Gamma \Gamma + \\ & + \overline{A_{10}} \mathbf{E} \cdot \Gamma \Gamma \cdot \mathbf{d} + \overline{A_{11}} \mathbf{d} \cdot \Gamma \Gamma \cdot \mathbf{d} + \overline{A_{12}} \mathbf{d}^2 \cdot \Gamma \Gamma \cdot \mathbf{d} + \\ & \left. + \overline{A_{20}} \mathbf{E} \cdot \Gamma \Gamma \cdot \mathbf{d}^2 + \overline{A_{21}} \mathbf{d} \cdot \Gamma \Gamma \cdot \mathbf{d}^2 + \overline{A_{22}} \mathbf{d}^2 \cdot \Gamma \Gamma \cdot \mathbf{d}^2\right), \end{aligned}$$

причем

$$\overline{A_2} = \frac{A_2}{A_1}, \quad \overline{A_{kl}} = \frac{A_{kl}}{A_1}, \quad k, l = 0, 1, 2.$$

При пластическом течении обязательно должно выполняться условие текучести (5.25). Чтобы выполнить его безусловно, подставим в него представление девиатора тензора напряжений по (5.55). Получим следующее уравнение

$$|A_1| N(\Phi(\mathbf{d}, \Gamma)) = \tau_s. \quad (5.56)$$

Это уравнение для определения коэффициента  $A_1$ . Полагая, что он положителен, найдем из (5.56)

$$A_1 = \frac{\tau_s}{N(\Phi(\mathbf{d}, \Gamma))}.$$

Подстановка этого выражения в (5.55) приводит к следующему представлению девиатора тензора напряжений

$$\mathbf{s} = \tau_s \frac{\Phi(\mathbf{d}, \Gamma)}{N(\Phi(\mathbf{d}, \Gamma))}. \quad (5.57)$$

Теперь следует приспособить к своим целям выражение вектора теплового потока (4.47). При  $\mathbf{D} = \mathbf{d} \neq 0$  получаем

$$\mathbf{h} = -\left(\kappa_0 \mathbf{E} + \kappa_1 \mathbf{d} + \kappa_2 \mathbf{d}^2\right) \cdot \Gamma. \quad (5.58)$$

При  $\mathbf{d} = 0$  оно упрощается

$$\mathbf{h} = -\kappa_0 \Gamma. \quad (5.59)$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда пластического течения нет, и когда оно есть.

Когда пластического течения нет, имеем условия (5.28) и (5.59). Так что, можем написать

$$\mathbf{d} = 0, \quad N(\mathbf{s}) < \tau_s, \quad \mathbf{h} = -\kappa_0 \Gamma. \quad (5.60)$$

Дополняем эти уравнения допустимыми представлениями свободной энергии и плотности внутренней энтропии

$$\psi = f(T), \quad S = S(T). \quad (5.61)$$

Уравнения (5.60) и (5.61) представляют собой определяющие уравнения недеформируемого теплопроводящего материала. Они были подробно проанализированы в [8]. Детали этого анализа здесь опускаем.

Напомню только, что  $S(T) = -\frac{\partial \psi(T)}{\partial T}$ .

Обратимся к случаю, когда пластическое течение происходит, т.е.  $\mathbf{d} \neq 0$ . Тензор напряжений для несжимаемого пластического материала находим с учетом (5.57)

$$\mathbf{d} \neq 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \tau_s \frac{\Phi(\mathbf{d}, \Gamma)}{N(\Phi(\mathbf{d}, \Gamma))}. \quad (5.62)$$

Уравнение теплового потока имеет вид (5.58)

$$\mathbf{h} = -(\kappa_0\mathbf{E} + \kappa_1\mathbf{d} + \kappa_2\mathbf{d}^2) \cdot \Gamma. \quad (5.63)$$

Плотности свободной энергии и внутренней энтропии следует взять в форме аналогичной (5.37), в которой учтены энергетические затраты на разрушение структуры пластического материала

$$\psi = f(T) + \psi_p, \quad S = S(T) + S_p. \quad (5.64)$$

По аналогии с (5.39) и (5.40) запишем предположительные уравнения для определения введенных величин  $\psi_p$  и  $S_p$

$$\dot{\psi}_p = \alpha \Pi, \quad \dot{S}_p = \beta \Pi, \quad (5.65)$$

где  $\Pi$  — производство энтропии

$$\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \rho_0 \dot{\psi} - \rho_0 S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \Gamma. \quad (5.66)$$

Итак, составлены предположительные определяющие уравнения пластического материала при развивающейся пластической деформации — это уравнения (5.62), (5.63), (5.64) и дополнительные условия (5.65) и (5.66).

Подставив (5.64), (5.65) в (5.66), получим уравнение для определения производства энтропии  $\Pi$

$$\Pi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \rho_0 \dot{f}(T) - \rho_0 \alpha \Pi - \rho_0 S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \Gamma,$$

откуда его и вычисляем

$$\Pi = \frac{1}{1 + \rho_0 \alpha} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \rho_0 \dot{f}(T) - \rho_0 S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right). \quad (5.67)$$

Универсальное диссипативное неравенство сводится к требованию неотрицательности производства энтропии, т.е.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \rho_0 \dot{f}(T) - \rho_0 S \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0.$$

Выполняя дифференцирование  $\psi$ , приходим к следующему неравенству

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} - \rho_0 \left( \frac{\partial f}{\partial T} + S \right) \dot{T} \geq 0. \quad (5.68)$$

Поскольку  $\dot{T}$  входит в это неравенство линейно, то по теореме о линейных неравенствах (см. раздел 1.4 из [8]) получим следующие необходимые и достаточные условия выполнения (5.68)

$$S = -\frac{\partial f(T)}{\partial T} = S(T), \quad (5.69)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \quad (5.70)$$

Первое уравнение здесь совпадает с тем, что было при  $\mathbf{d} = 0$ . Таким образом,  $\psi$  и  $S$  имеют одинаковые представления, как при  $\mathbf{d} \neq 0$ , так и при  $\mathbf{d} = 0$ .

Обратим теперь внимание на неравенство (5.70) и подставим в него представления девиатора тензора напряжений и вектора теплового потока по (5.57) и (5.58). Получим по аналогии с (4.52) следующее неравенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{d} + \overline{A_2} \mathbf{d}^2 \cdot \cdot \mathbf{d} + \frac{\kappa_0}{T} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} N(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Gamma})) + \\ & + \left[ \overline{A_{00}} + \frac{\kappa_1}{T} N(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Gamma})) \right] \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \\ & + \left[ \overline{A_{01}} + \overline{A_{10}} + \frac{\kappa_2}{T} N(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Gamma})) \right] \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}^2 \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \\ & + (A_{02} + A_{20} + A_{11}) \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{D}^3 \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \\ & + (\overline{A_{21}} + \overline{A_{12}}) \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}^4 \cdot \boldsymbol{\Gamma} + \overline{A_{22}} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{d}^5 \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Это неравенство оказалось даже сложнее, чем (4.52), поскольку содержит в своем составе очень сложное выражение  $N(\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Gamma}))$ . Нельзя

даже представить себе, что мы сможем когда-нибудь найти необходимые и достаточные условия его выполнения.

Обратимся, наконец, к уравнению первого закона термодинамики, т.е. к уравнению теплопроводности. Оно имеет следующий вид

$$\rho_0 T \dot{S} = \Phi + b + \nabla \cdot \mathbf{h}, \quad (5.72)$$

причем здесь  $\Phi$  — диссипативная функция

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho S \dot{T}. \quad (5.73)$$

Учтем, что пластический материал несжимаем, т.е. что  $\mathbf{D} = \mathbf{d}$ , и что свободная энергия имеет представление (5.64)

$$\psi = f(T) + \psi_p, \quad (5.74)$$

где  $\psi_p$  — мощность, идущая на разрушение структуры материала.

Последняя определяется уравнением (5.65)

$$\dot{\psi}_p = \alpha \Pi, \quad (5.75)$$

причем  $\Pi$  — производство энтропии

$$\Pi = \Phi - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma}. \quad (5.76)$$

Подставим (5.74) в (5.73) и учтем (5.75) и (5.76). Тогда получим следующее уравнение для определения диссипативной функции

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} - \rho_0 \dot{f} - \rho_0 \alpha \left( \Phi - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) - \rho_0 S \dot{T}.$$

Отсюда находим

$$\Phi = \frac{1}{1 + \rho_0 \alpha} \left( \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} - \rho_0 \dot{f} - \rho_0 S \dot{T} + \rho_0 \alpha \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma}}{T} \right).$$

В силу (5.69), это выражение упрощается и принимает вид

$$\Phi = \frac{1}{1 + \rho_0 \alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} + \frac{\rho_0 \alpha}{1 + \rho_0 \alpha} \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma}}{T}. \quad (5.77)$$

Подставив это выражение в (5.72), получим уравнение теплопроводности

$$\rho_0 T \dot{S} = \frac{1}{1 + \rho_0 \alpha} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} + \frac{\rho_0 \alpha}{1 + \rho_0 \alpha} \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma}}{T} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (5.78)$$

Произведение  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\mathbf{d}$  представляет собой мощность механических напряжений на пластических деформациях. Из уравнения (5.78) видно, что не вся эта мощность тратится на нагрев, а только ее часть. Это понятно: оставшаяся мощность тратится на разрушение структуры пластического

материала. Однако, непонятна роль второго слагаемого в правой части (5.78).



## 6. МАТЕРИАЛЫ С ЧИСТЫМИ СВОЙСТВАМИ

### 6.1. Предварительные соображения об учете взаимного влияния механических и тепловых процессов

Приведенные примеры показывают, что совместный учет механического движения и тепловых процессов в материалах приводит к безумно сложным уравнениям и неравенствам. Возникающие трудности — прямое следствие принципа равноприсутствия, который кратко можно сформулировать так: все влияет на все.

В теории термоупругого материала все очень сложно, но как-то еще воспринимается и более или менее приемлемо.

А вот в термомеханике вязкого и пластического материалов возникающие трудности становятся просто непреодолимыми. Возникает вопрос: всегда ли обязательно проводить совместный учет тепловых и механических явлений. По-видимому, бывает по-всякому. Однако, вполне очевидно, что существует класс явлений, когда такой совместный учет не является необходимым. Вместе с тем, невозможно отрицать, что в некоторых экзотических случаях такой учет является неизбежным.

Рассмотрение начнем с термоупругого материала. Тут все сравнительно просто. В формулы для напряжений градиент температуры вообще не входит. Этот факт — прямое следствие второго закона термодинамики в форме универсального диссипативного неравенства. Так что, можно считать, что этот факт твердо установлен и незыблем. Это существенное упрощение поставленной выше проблемы.

Обратимся теперь к вектору теплового потока. Формула (1.16) указывает на то, что он — тепловой поток — зависит от меры деформации Фингера. Конечно, в том случае, когда деформация мала, и тензор Фингера мало отличается от  $\mathbf{E}$ , то вектор теплового потока будет нечувствителен к малым деформациям. Поэтому представляется очевидным, что в большинстве инженерных приложений, в которых деформации действительно малы, учет влияния деформации на тепловой поток не является необходимым. Ну, а если речь идет о резине или каком-нибудь другом эластомере, и мера деформации Фингера сильно отличается от  $\mathbf{E}$ ,

то тогда влияние деформации на вектор теплового потока окажется существенным. Так ли это на самом деле? Ответить на это вопрос может лишь эксперимент. Есть еще один момент, на котором следует сосредоточить свое внимание. Пусть речь идет опять о резине. Главное, что волнует инженера, это вопрос о том, какие будут напряжения. А вот к тепловому потоку он относится безразлично. Он рассуждает примерно так: «Ну, подумаешь, больше или меньше тепла пройдет по этой растянутой или сжатой резине». И хоть в этой задаче о резине тепловой поток действительно зависит от деформации, но этот вопрос никого не интересует. Конечно, в таких задачах можно пренебречь зависимостью  $h(\mathbf{F})$  за ненадобностью. Однако такое рассуждение убедительно для инженера, но не для ученого, изучающего природу.

А вот с вязкой жидкостью дело обстоит значительно сложнее. Как видно из формул (4.47) и (4.48) имеет место совместное влияние тензора скоростей деформации и градиента температуры и на тензор напряжений, и на вектор теплового потока. С одной стороны, градиент температуры влияет на поток жидкости, а значит, например, и на распределение скорости по сечению трубки в задаче о течении вязкой жидкости по трубе. Это очень важно. С другой стороны, наличие влияния тензора скоростей деформации на вектор теплового потока тоже важно, ибо это определяет способность текущей вязкой жидкости отводить тепло от стенок разнообразных охлаждаемых систем и способность передавать тепло от текущей горячей вязкой жидкости к стенкам нагревателей. Все это дело осложняется тем, что поток жидкости становится турбулентным. А это уже новая серьезная наука, которой мы не будем заниматься. Это, если угодно, случай, когда взаимное влияние механических и тепловых явлений существенно и важно.

Но ведь есть еще другой класс явлений, когда такое влияние оказывается несущественным. Это, например, случай медленного деформирования такого материала, как смола. Трудно ожидать здесь серьезного взаимовлияния механических и тепловых явлений.

Каков же главный и поучительный вывод из проделанных выше вычислений и рассуждений? Полагаю, что в огромном большинстве

инженерных приложений к конструкциям, когда и деформации, и скорости деформаций малы, учет взаимовлияния не является необходимым.

Вместе с тем, существуют задачи, в которых учет взаимовлияний необходим. Однако, такой учет очень сложен. Но это еще цветочки, а ягодки будут впереди.

Пока речь шла о совместном учете всего двух явлений: теплопроводности и упругости или теплопроводности и вязкости. А что будет, если возникнет необходимость в совместном учете трех явлений, например, теплопроводности, упругости и вязкости? Трудности будут нарастать, как снежный ком, катящийся по снегу с горы.

Анализируя все сказанное о термоупругом, термовязком и термопластичном материалах, можем заключить, что серьезные проблемы возникают при учете взаимного влияния разных явлений друг на друга. Все существенно упростится, если рассматривать идеальные материалы с чистыми свойствами.

Например, в теории чистой теплопроводности следует учитывать только влияние градиента температуры на вектор теплового потока. Придется отказаться от учета влияния на последний тензора Фингера и тензора скоростей деформаций. Именно так мы поступили в разделе 1.4 учебного пособия [8].

В теории чистой упругости следует учитывать только влияние тензора Фингера на тензор напряжений. А вот от учета влияния на последний градиента температуры следует отказаться. Впрочем, это не проявление нашей воли. Это подсказывают теоретические рассуждения, содержащиеся в разделах 1.2 и 1.3 этого учебного пособия.

Далее, в теории чистой вязкости следует учитывать только влияние тензора скоростей деформации на тензор напряжений. А вот от учета влияния на последний градиента температуры следует отказаться. Никакие теоретические соображения не подсказывают этого. Это просто наша воля, ориентированная на упрощение формул. Так же обстоит дело и в теории чистой пластичности. В сказанном нет ничего нового: именно так поступают исследователи, работающие в чистой теплопроводности [5], в чистой нелинейной теории упругости [2] и чистой нелинейной и линейной теориях вязкой жидкости [3], и наконец, в теории пластичности [4]. В рамках этого подхода определяющие уравнения материалов со

смешанными свойствами можно получить, используя метод реологических моделей, сформулированный в разделе 4.3 учебного пособия [8].

## 6.2. Определяющие уравнения для изотропных материалов с чистыми свойствами: теплопроводность и теплоемкость, упругость, вязкость, пластичность

### 1. Недеформируемый изотропный теплопроводящий теплоемкий материал

Определяющие уравнения этого материала заимствуем из раздела 1.4 учебного пособия [8]

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(T, \boldsymbol{\Gamma}) - \text{произвольная функция,} \\ \mathbf{h} = -\kappa_0 \boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = \psi(T), \\ S = S(T) = -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \end{cases} \quad (6.1)$$

Здесь  $\kappa_0$  — коэффициент теплопроводности

$$\kappa_0 = \kappa_0(T, |\boldsymbol{\Gamma}|).$$

Плотность внутренней энтропии вычисляется через теплоемкость  $C(T)$

$$S = \int_0^T \frac{C(p)}{p} dp.$$

Тот факт, что это модель несжимаемого материала фиксируется следующими формулами

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

Реологическая модель такого теплопроводящего и теплоемкого материала изображена на рис. 6.1а.

### 2. Линейный упругий материал

Определяющие уравнения заимствуем из раздела 1.8 учебного пособия [8]

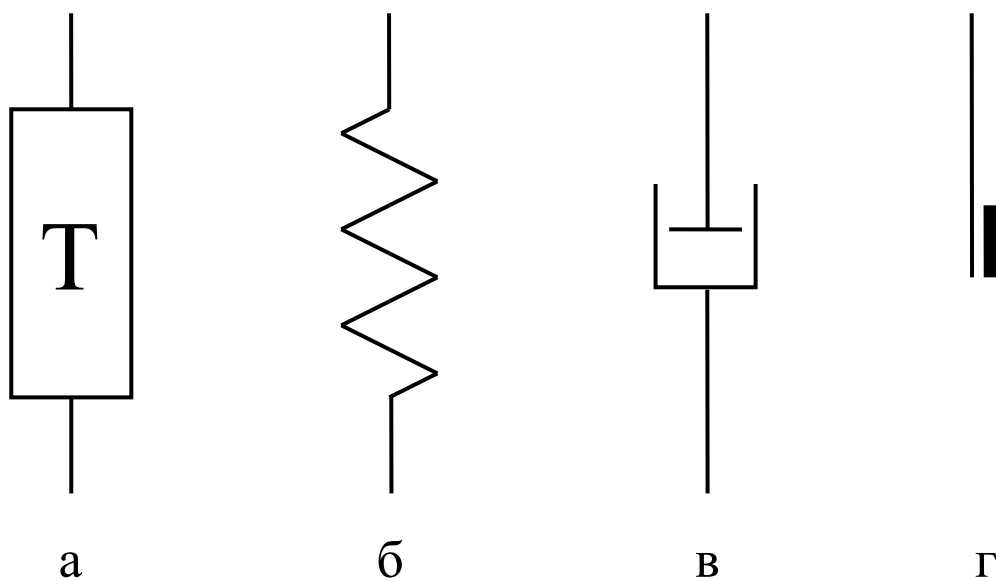


Рис. 6.1. Реологические модели материалов с чистыми свойствами:  
теплопроводность, упругость, вязкость, пластичность

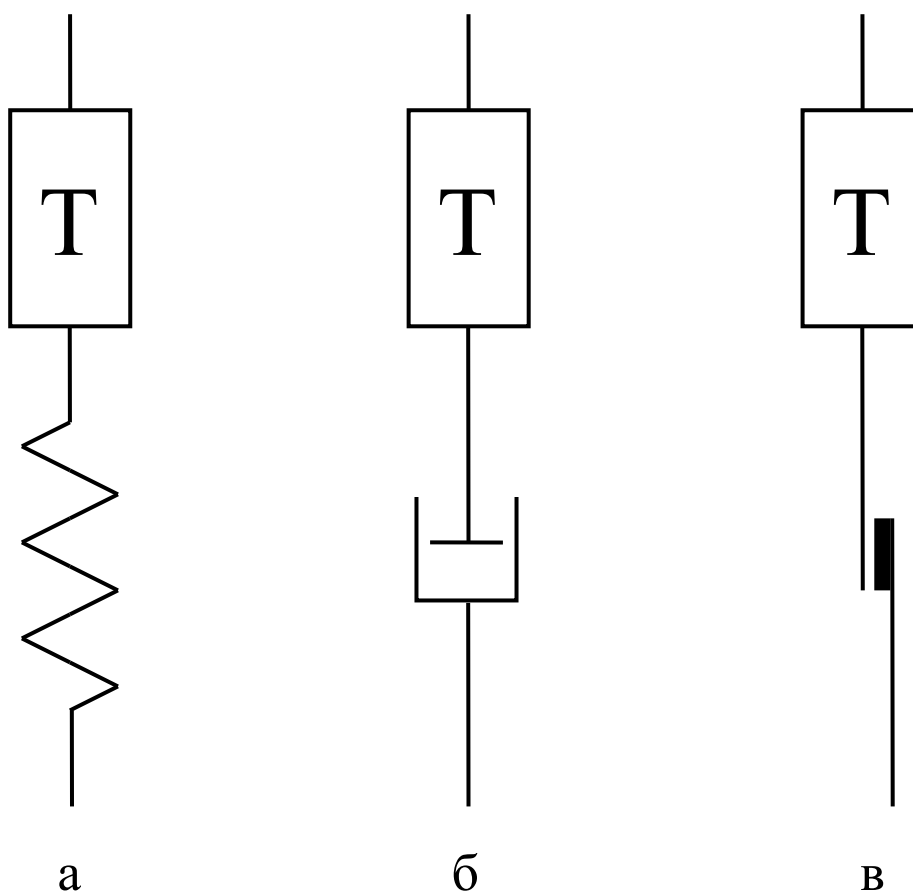


Рис. 6.2. Реологические модели термоупругого, термовязкого и термопластичного материалов

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = (A + k\theta)\mathbf{E} + 2G\mathbf{e}, \\ \mathbf{h} = 0, \\ \psi = A\theta + k\frac{\theta^2}{2} + G\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}, \\ S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = -\frac{dA}{dT}\theta - \frac{dk}{dT}\frac{\theta^2}{2} - \frac{dG}{dT}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Здесь  $k = k(T)$  — модуль объемного сжатия,  $G = G(T)$  — модуль сдвига,  $A = A(T)$  — начальное нормальное напряжение. Первое уравнение (6.2) отличается от знаменитой формулы закона Гука из курса «Сопротивление материалов» наличием слагаемого с  $A$ . Дело в том, что в сопротивлении материалов принимается гипотеза о существовании натурального состояния. Предполагается, что это такое состояние, в котором напряжения равны нулю. Далее, отсчет перемещений ведется от этого состояния, и тогда член с  $A$  в (6.2) пропадает. Однако мы сохраним это слагаемое. Полагаем, что гипотеза о существовании натурального состояния может действительно выполняться, но только при одной какой-нибудь температуре  $T_0$ , так что можно допустить, что  $A(T_0) = 0$ . Однако здравый смысл подсказывает, что если зафиксировать деформации на нулевом уровне, т.е. положить  $\theta = 0$ ,  $\mathbf{e} = 0$ , и нагреть упругий материал выше температуры  $T_0$ , то, несомненно, в нем возникнут сжимающие напряжения, а если охладить ниже температуры  $T_0$  — растягивающие. Таким образом, окажется, что  $A(T) \neq 0$  при  $T \neq T_0$ .

Наконец, по третьему закону термодинамики плотность внутренней энтропии должна стремиться к нулю при стремлении к нулю абсолютной температуры  $T$ . С помощью четвертого уравнения (6.2) находим, что при  $T \rightarrow 0$  должно быть

$$\frac{dA(T)}{dT} \rightarrow 0, \quad \frac{dk(T)}{dT} \rightarrow 0, \quad \frac{dG(T)}{dT} \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

Реологическая модель материала изображена на рис. 6.1б.

### 3. Линейный вязкий материал

Определяющие уравнения этого материала заимствуем из раздела 1.7 учебного пособия [8] и упрощаем, выделяя чистую вязкость

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \lambda(T) I_1 \mathbf{E} + 2\eta(T) \mathbf{d}, & I_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \\ \mathbf{h} = 0, \\ \psi = 0, \\ S = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Реологическая модель вязкого материала изображена на рис. 6.1в.

#### 4. Нелинейный упругий материал

Определяющие уравнения этого материала заимствуем из разделов 1.1, 1.2 с уточнениями 3.6 этого учебного пособия и выделяем только чистую упругость

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = A\mathbf{E} + 2\rho \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{F}} \right)^S, \\ \mathbf{h} = 0, \\ \psi = \frac{A}{\rho_0} (\sqrt{I_3} - 1) + \psi^*, \\ S = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dA}{dT} (\sqrt{I_3} - 1) - \frac{\partial \psi^*}{\partial T}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Многообразие этих определяющих уравнений связано с многообразием представлений свободной энергии  $\psi^*$ . Об этом шла речь в главе 3 этого учебного пособия.

Возможно найти более подробное выражение для тензора напряжений, а именно (1.47)

$$\boldsymbol{\sigma} = A\mathbf{E} + 2\rho \left( \left( I_3 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} + I_2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{E} + \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{F} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_3 \mathbf{F}^{-1} \right), \quad (6.6)$$

где  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  — главные инварианты тензора Фингера  $\mathbf{F}$ . Модель упругого материала изображена на рис. 6.1б.

#### 5. Несжимаемый нелинейный упругий материал

Напряжение дается формулой (1.48)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial I_1} \mathbf{F} - \frac{\partial w}{\partial I_2} \mathbf{F}^{-1} \right), \quad I_3 = 1, \quad (6.7)$$

где

$$w = \rho_0 \psi.$$

Неопределенная величина  $\bar{p}$ , конечно же, не является давлением, но определяет его.

### 6. Нелинейный вязкий материал

Определяющие уравнения заимствуем из раздела 4.3 этого учебного пособия и выделяем только чистую вязкость

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = A_0 \mathbf{E} + A_1 \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2, \\ \mathbf{h} = 0, \quad \psi = 0, \quad S = 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

где  $A_k$  — функции температуры и главных инвариантов тензора скоростей деформации  $\mathbf{D}$

$$A_k = A_k(T, I_1, I_2, I_3).$$

Реологическая модель такого вязкого материала изображена так же на рис. 6.1в.

### 7. Несжимаемый нелинейный вязкий материал

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -\bar{p} \mathbf{E} + A_1 \mathbf{d} + A_2 \mathbf{d}^2, \\ \mathbf{h} = 0, \quad \psi = 0, \quad S = 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Обязательно должно быть выполнено условие несжимаемости

$$I_1(\mathbf{D}) = 0$$

или

$$\mathbf{d} = \mathbf{D}.$$

### 8. Несжимаемый линейный вязкий материал

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}, \\ \mathbf{h} = 0, \quad \psi = 0, \quad S = 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

причем  $\eta$  — сдвиговая вязкость.

### 9. Несжимаемый линейный пластический материал

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{E} + \mathbf{s}, \\ \mathbf{h} = 0, \quad \psi = \psi_p, \quad S = 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

причем девиатор тензора напряжений  $\mathbf{s}$  определяется следующими уравнениями и неравенствами

$$\begin{cases} \mathbf{d} = 0, & N(\mathbf{s}) < \tau_s, \\ \mathbf{d} \neq 0, & \mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d}}{N(\mathbf{d})}. \end{cases}$$



При записи этих уравнений принято предположение о том, что в уравнении для  $\psi$  величина  $\psi_p$  представляет собой мощность, затрачиваемую на разрушение структуры. Также принято предположение о том, что  $\psi_p$  всегда возрастает, т.е.

$$\dot{\psi}_p > 0$$

и никогда не убывает

#### 10. Нелинейный несжимаемый пластический материал

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \mathbf{s}, \\ \mathbf{h} = 0, \quad \psi = \psi_p, \quad S = 0, \end{cases} \quad (6.12)$$

причем

$$\begin{cases} \mathbf{d} = 0, & N(\mathbf{s}) < \tau_s, \\ \mathbf{d} \neq 0, & \mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d} + ADev(\mathbf{d}^{-1})}{N(\mathbf{d} + ADev(\mathbf{d}^{-1}))}. \end{cases}$$

Реологическая модель пластического материала изображена на рис. 6.1г.

В трех последующих разделах мы сосредоточим свое внимание на составлении определяющих уравнений термоупругого, термовязкого и термопластического материалов методом реологических моделей.

### 6.3. Термоупругий материал

Реологическая модель такого материала изображена на рис. 6.2а. Это последовательное соединение элемента теплопроводности и элемента чистой упругости. В соответствии с общей теорией метода реологических моделей, изложенной в разделе 4.3 учебного пособия [8], имеем следующие условия последовательного соединения элементов

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2, \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2, \\ \psi = \psi_1 + \psi_2, \\ S = S_1 + S_2. \end{cases} \quad (6.13)$$

Описание поведения теплопроводящего элемента модели находим в разделе 6.2.

Определяющие уравнения имеют следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{A} - \text{произвольная функция,} \\ \mathbf{H}_1 = -\kappa(T, |\boldsymbol{\Gamma}|)\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi_1 = f(T), \\ S_1 = -\frac{df(T)}{dT} = \int_0^T \frac{C(p)}{p} dp, \end{array} \right. \quad (6.14)$$

$$\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}. \quad (6.15)$$

Далее, обращаем внимание на кинематическое условие соединения элементов. Учитывая (6.12), можем заключить, что имеет место равенство

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_2. \quad (6.16)$$

Оно позволяет сделать следующее важное заключение

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2. \quad (6.17)$$

Действительно, уравнения для определения тензоров Фингера  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= (\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}), \\ \dot{\mathbf{F}}_2 &= (\mathbf{D}_2 - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2 \cdot (\mathbf{D}_2 + \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Дополним эти уравнения следующими начальными условиями

$$t = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{E}. \quad (6.19)$$

Учтем также условие (6.16) и сразу обнаружим, что задачи Коши (6.18) для тензоров  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}_2$  совпадают. Следовательно, равенство (6.17) действительно имеет место.

Дальнейшее рассмотрение проведем отдельно для случаев линейного и нелинейного упругих элементов.

#### 1. Линейно упругий элемент

Поскольку материал линейный, следует использовать линеаризованные кинематические соотношения

$$\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{D}_2 = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2,$$

а значит и

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, & \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \dot{\theta}_2 &= \dot{\theta}, & \theta_2 &= \theta. \end{aligned}$$

Далее, линейное описание упругого элемента заимствуем из раздела 6.2. Оно имеет вид (6.2)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_2 = (A + k\theta)\mathbf{E} + 2G\mathbf{e}, \\ \mathbf{h}_2 = 0, \\ \psi_2 = A\theta + k\frac{\theta^2}{2} + G\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}, \\ S_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = -\frac{dA}{dT}\theta - \frac{dk}{dT}\frac{\theta^2}{2} - \frac{dG}{dT}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}. \end{cases} \quad (6.20)$$

Здесь  $k = k(T)$  — модуль объемного сжатия,  $G = G(T)$  — модуль сдвига, а  $A = A(T)$  — начальное нормальное напряжение.

Мы предположили, что все эти величины являются функциями температуры. А не противоречит ли это предположение объявлению о линейности материала? Полагаю, что не противоречит. Ведь материал является геометрически линейным. Никаких предположений в отношении температуры не принималось и не принимается.

Запишем силовое условие соединения элементов  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2$ . Фактически оно имеет следующий вид

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A} = (A + k\theta)\mathbf{E} + 2G\mathbf{e}$$

и может быть использовано для двух целей: для определения произвольного до этой поры тензора напряжений в теплопроводящем и теплоемком элементе и для определения действующего напряжения

$$\boldsymbol{\sigma}\sqrt{I_3} = \boldsymbol{\Sigma} = (A + k\theta)\mathbf{E} + 2G\mathbf{e}.$$

Это выражение следует упростить, учитывая, что при линейном описании третий инвариант  $I_3(\mathbf{F})$  приблизительно равен единице.

Остальные условия соединения (6.13) так же легко записать, и в результате всего получим следующие уравнения

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = (A(T) + k(T)\theta)\mathbf{E} + 2G(T)\mathbf{e}, \\ \mathbf{h} = -\kappa(T, |\boldsymbol{\Gamma}|)\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = f(T) + A(T)\theta + k(T)\frac{\theta^2}{2} + G(T)\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}, \\ S = -\frac{df}{dT} - \frac{dA}{dT}\theta - \frac{dk}{dT}\frac{\theta^2}{2} - \frac{dG}{dT}\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Таким образом, мы получили определяющие уравнения термоупругого материала. Они отличаются от соответствующих уравнений раздела 1.8 учебного пособия [8] только учетом начального напряжения  $A = A(T)$  и еще тем, что здесь допускается зависимость модуля сдвига и модуля объемного сжатия от температуры.

Применим, например, первое из этих уравнений для описания свободного теплового расширения или сжатия. Поскольку расширение-сжатие свободно, то это значит, что тензор напряжений равен нулю

$$\boldsymbol{\sigma} = 0.$$

Это условие приводит к следующему уравнению для определения термической деформации

$$(A(T) + k(T)\theta_T)\mathbf{E} + 2G(T)\mathbf{e}_T = 0. \quad (6.22)$$

Отсюда легко находим

$$\mathbf{e}_T = 0, \quad \theta_T = -\frac{A(T)}{k(T)}. \quad (6.23)$$

Эти уравнения приводят к формуле для определения термической деформации

$$\boldsymbol{\Sigma}_T = \frac{\theta_T}{3}\mathbf{E} + \mathbf{e}_T = -\frac{A(T)}{3k(T)}\mathbf{E}$$

и к следующему представлений тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = k(T)(\theta - \theta_T)\mathbf{E} + 2G(T)\mathbf{e}.$$

В этом уравнении мы узнаем знаменитую формулу Дюамеля – Неймана.

Возникает естественный вопрос. Зачем нужно было проводить длинные рассуждения, чтобы, в конце концов, получить известные формулы? Возникшая ситуация, с математической точки зрения напоминает первый шаг в доказательстве некоторого утверждения методом «от противного». Наше утверждение состоит в том, что метод реологических моделей — это универсальный и надежный метод, который позволяет получить много разных формул для описания поведения материалов с комбинированными свойствами. Как нужно оценить тот результат, что этим методом получили такие уравнения, справедливость которых не вызывает сомнения? Очевидно, следует сказать так. Раз противоречия нет, то это означает то, что у нас нет оснований отвергнуть

ни то, что предполагалось, т.е. метод реологических моделей, ни другой метод, которым была получена такая же формула. А вот, если бы получилось противоречие, то нам пришлось бы разбираться в том, где правильный результат — тот, который получен с помощью нашего предположения или тот, который получен другим методом.

Таким образом, обнаруженный факт совпадения результатов следует считать положительным.

## II. Нелинейный упругий элемент

Очевидно, что условия соединения сохраняют вид (6.13). Очевидно также, что останутся в силе уравнения (6.14), (6.15), (6.16) и (6.17). И только определяющие уравнения (6.21) следует заменить на (6.5), т.е. написать так

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_2 = A\mathbf{E} + 2\rho \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{F}} \right)^S, \\ \mathbf{h}_2 = 0, \\ \psi_2 = \frac{A}{\rho_0} (\sqrt{I_3} - 1) + \psi^*, \\ S_2 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dA}{dT} (\sqrt{I_3} - 1) - \frac{\partial \psi^*}{\partial T}. \end{array} \right. \quad (6.24)$$

В результате, определяющие уравнения термоупругого материала примут следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = A\mathbf{E} + 2\rho \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{F}} \right)^S, \\ \mathbf{h} = -\frac{1}{\sqrt{I_3}} \kappa(T, |\mathbf{\Gamma}|) \mathbf{\Gamma}, \\ \psi = \frac{A}{\rho_0} (\sqrt{I_3} - 1) + \psi^*, \\ S = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dA}{dT} (\sqrt{I_3} - 1) - \frac{\partial \psi^*}{\partial T}. \end{array} \right.$$

Представление традиционной свободной энергии  $\psi^*$  следует брать из коллекции главы 3 этого учебного пособия. Но в этой главе предложено много разных представлений и, что особенно важно отметить, разных

представлений напряжений, специально приспособленных к тому или другому варианту свободной энергии. Возникает трудный вопрос: какое из уравнений нелинейного упругого материала использовать? Конечно, вполне пригодны уравнения (1.46) или (1.47). Но возможно использовать и другие формы, описывающие чисто упругое поведение. Например, значительный интерес представляет форма, рассмотренная в разделах 3.2 и 3.4. В ней вместо тензора Фингера и связанных с ним главных искажений  $V_p = U_p$  используются модифицированные главные искажения

$$\bar{U}_p = J^{-\frac{1}{3}} U_p, \quad (6.25)$$

причем  $J$  — это относительный объем

$$J = U_1 U_2 U_3.$$

Модифицированные главные напряжения интересны тем, что они не чувствительны к изменению объема и отражают только изменения формы малой окрестности точки деформируемого тела. Главные напряжения находятся по формуле (3.75) с добавлением начального напряжения, т.е. по следующей формуле

$$\sigma_{kk} = A + \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right), \quad \left( \sum_k \right), \quad (6.26)$$

причем

$$w = \rho_0 \psi = w(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3, J, T) \quad (6.27)$$

или

$$w = w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, T). \quad (6.28)$$

В последней формуле  $\bar{I}_1$  и  $\bar{I}_2$  — это первый и второй главные инварианты меры деформации Фингера или меры деформации Коши – Грина

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2 + \bar{U}_3^2,$$

$$\bar{I}_2 = \bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2 + \bar{U}_2^2 \bar{U}_3^2 + \bar{U}_3^2 \bar{U}_1^2.$$

Третий инвариант

$$\bar{I}_3 = \bar{U}_1^2 \bar{U}_2^2 \bar{U}_3^2$$

в нее не вошел, потому что в силу определения (6.25) он равен единице.

Таким образом, определяющие уравнения принимают следующий вид

$$\begin{aligned}\Sigma_{kk_2} &= \frac{\sigma_{kk_2}}{J} = \frac{1}{J} \left( A + \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right) \right), & \left( \frac{\Sigma}{/k} \right), \\ \mathbf{h}_2 &= 0, \\ \psi_2 &= \frac{1}{\rho_0} w = \frac{1}{\rho_0} \left( w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, T) + A(J-1) \right), & (6.29) \\ S_2 &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial T} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, T)}{\partial T} + \frac{dA}{dT}(J-1) \right),\end{aligned}$$

где  $A$  — начальное напряжение

$$A = A(T).$$

Объединяя теперь уравнения элементов (6.14) и (6.29) в соответствии с условиями соединения (6.13), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Sigma_{kk} = A_{kk} = \frac{1}{J} \left( A + \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right) \right), & \left( \frac{\Sigma}{/k} \right), \\ \mathbf{H} = -\kappa(T, |\mathbf{\Gamma}|) \mathbf{\Gamma}, \\ \psi = f(T) + \frac{1}{\rho_0} \left( A(J-1) + w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, T) \right), & (6.30) \\ S = \int_0^T \frac{C(p)}{p} dp - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dA}{dT}(J-1) + \frac{\partial w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, T)}{\partial T} \right). \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы позволяет, во-первых, вычислить до сей поры неопределенную произвольную функцию  $A$  в главном базисе тензора Фингера

$$A_{kk} = \frac{1}{J} \left( A(T) + \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right) \right), \quad \left( \frac{\Sigma}{/k} \right), \quad (6.31)$$

а, во-вторых, формулу для напряжения

$$\sigma_{kk} = A(T) + \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right), \quad \left( \frac{\Sigma}{/k} \right). \quad (6.32)$$

Формулы для вектора теплового потока, свободной энергии и энтропии находим из (6.30). В результате определяющие уравнения термоупругого материала принимают следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{kk} = A(T) + \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right), \quad \left( \sum_{/k} \right), \\ \mathbf{h} = -\kappa(T, |\mathbf{\Gamma}|) \mathbf{\Gamma}, \\ \psi = f(T) + \frac{1}{\rho_0} \left( A(J-1) + w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, T) \right), \\ S = \int_0^T \frac{C(p)}{p} dp - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dA}{dT} (J-1) + \frac{\partial w(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, T)}{\partial T} \right). \end{array} \right. \quad (6.33)$$

Прокомментируем полученные результаты.

Тензор напряжений  $\mathbf{A}$  в теории теплопроводящего и теплоемкого материала оставался произвольным и неопределенным. В теории термоупругого материала с реологической моделью, изображенной на рис. 6.2а, он полностью определился. Его представление (6.31) показывает, что он существенным образом зависит от определяющего уравнения упругого элемента модели.

Остановимся на втором моменте, достойном комментария.

Применим определяющие уравнения (6.33) для описания свободного теплового расширения или сжатия рассматриваемого термоупругого материала. Поскольку при таком свободном движении напряжения равны нулю, т.е.

$$\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \sigma_{kk} = 0, \quad \left( \sum_{/k} \right).$$

Подставив сюда выражения из (6.33) или (6.32), получим три уравнения для определения трех главных напряжений

$$\sigma_{kk} = A(T) + \frac{\partial w}{\partial J} + \frac{1}{J} \left( \bar{U}_k \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_k} - \frac{1}{3} \bar{U}_r \frac{\partial w}{\partial \bar{U}_r} \right) = 0, \quad \left( \sum_{/k} \right), \quad (6.34)$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Далее, воспользуемся таким обстоятельством, что при свободном тепловом движении изотропного материала все главные искажения равны друг другу

$$U_1 = U_2 = U_3 = U,$$

и определим по (6.25)

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 1. \quad (6.35)$$



Главные инварианты тоже окажутся постоянными

$$\bar{I}_1 = 3, \quad \bar{I}_2 = 3, \quad (6.36)$$

т.е., независимыми от происходящего теплового движения.

Учитывая (6.35) обнаруживаем, что скобка в (6.34) обращается в нуль, и тогда уравнение (6.34) примет очень простой вид

$$A(T) + \frac{\partial w}{\partial J} = 0, \quad (6.37)$$

причем потенциальная энергия фактически зависит только от  $J$  и  $T$

$$w = w(3, 3, J, T).$$

Из этого уравнения должен быть вычислен относительный объем  $J$ . Главные искажения после этого найдем по формуле (6.25) с учетом (6.35). Результат этих вычислений таков

$$U_1 = U_2 = U_3 = J^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{J}. \quad (6.38)$$

Рассмотрим некоторые формы зависимости потенциальной энергии от  $J$ . Так по (3.41), (3.45), (3.50), (3.51) и (3.52) при условии расширения (6.36) имеем следующее выражение потенциальной энергии

$$w = \frac{1}{d(T)}(J-1)^2, \quad d > 0, \quad (6.39)$$

и тогда уравнение (6.37) принимает вид

$$A(T) + \frac{2}{d(T)}(J-1) = 0.$$

Отсюда находим

$$J = 1 - \frac{d(T)A(T)}{2}. \quad (6.40)$$

Проанализируем это выражение с позиции здравого смысла.

Во-первых, при небольших величинах начального напряжения эта формула дает вполне осмысленные результаты: если начальное напряжение было сжимающим ( $A < 0$ ), то относительный объем окажется больше единицы, а если это напряжение было растягивающим ( $A > 0$ ), то при последующем свободном тепловом движении относительный объем окажется меньше единицы, т.е. уменьшится по сравнению с начальным состоянием, в котором  $J = 1$ . Однако если начальное напряжение будет достаточно большим, то относительный объем в соответствии с (6.40)

окажется отрицательным, а этот результат противоречит здравому смыслу, поскольку должно быть всегда

$$J > 0.$$

Таким образом, самое популярное выражение для потенциальной энергии (6.39) дает приемлемые значения только при не слишком большом начальном напряжении. При большом  $A(T)$  оно приводит к бессмысленным значениям. Это означает, что выражение (6.39) не является универсальным, т.е. пригодным при любых значениях  $A(T)$ .

Рассмотрим потенциал Огдена (3.68). При условии (6.35) он имеет представление

$$w = \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k(T)} (J-1)^{2k}, \quad d_k > 0, \quad (6.41)$$

и тогда уравнение (6.37) примет следующий вид

$$A + \sum_{k=1}^N \frac{2}{d_k} (J-1)^{2k-1} = 0.$$

При большом значении  $A(T)$  это уравнение дает отрицательные значения  $J$ . Таким образом, потенциал (6.41) тоже не является универсальным.

Рассмотрим еще одно представление традиционного потенциала — потенциал Гента (3.119)

$$w = \frac{1}{d} \left( \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right), \quad d > 0. \quad (6.42)$$

При свободном тепловом расширении-сжатии имеем следующее уравнение для определения  $J$

$$A + \frac{1}{d} \left( J - \frac{1}{J} \right) = 0.$$

Оно сводится к квадратному уравнению

$$J^2 + AdJ - 1 = 0$$

и имеет два решения

$$J = \frac{1}{2} \left( -Ad \pm \sqrt{(Ad)^2 + 4} \right),$$

одно из которых положительно, а другое отрицательно, т.е. бессмысленно.

Положительное решение имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(Ad)^2 + 4} - Ad \right)$$

и пригодно при любых значениях начального напряжения.

Таким образом, потенциал (6.42) является универсальным.

В литературе можно встретить еще одно выражение для потенциальной энергии объемного деформирования

$$w = \frac{1}{d} (J - 1 - \ln J). \quad (6.43)$$

При изотропном свободном тепловом расширении напряжение обращается в нуль. Уравнение для  $J$  принимает вид

$$\sigma_{kk} = A + \frac{1}{d} \left( 1 - \frac{1}{J} \right) = 0, \quad \left( \sum_k \right).$$

Его решение таково

$$J = \frac{1}{1 + Ad}.$$

При малых значениях начального напряжения это выражение дает осмысленные результаты. Однако при некотором конечном значении сжимающего напряжения оно дает бесконечно большое значение  $J$ . Дальнейшее уменьшение  $A$  приводит к отрицательным значениям  $J$ , что является бессмысленным.

Таким образом, представление (6.42) не является универсальным.

В литературе не встречается следующее представление потенциальной энергии деформации

$$w = \frac{1}{d} (J \ln J - J - 1).$$

Подставляя его в (6.37), получим следующее уравнение для определения относительного объема  $J$

$$\sigma_{kk} = A + \frac{1}{d} \ln J = 0. \quad (6.44)$$

Его решение имеет вид

$$J = e^{-Ad}.$$

С большим удовлетворением обнаруживаем, что это решение является универсальным в том смысле, что оно оказывается пригодным при любых значениях начального напряжения. Более того, если принять рациональное представление для начального напряжения

$$A = -\frac{3\alpha}{d}(T - T_0),$$

то получим следующие заслуживающие доверия формулы для относительного объема и искажения

$$J = \exp(3\alpha(T - T_0)), \quad (6.45)$$

$$U = \exp(\alpha(T - T_0)). \quad (6.46)$$

Рассмотрим еще один, на первый взгляд абстрактный, пример. Положим

$$w = \frac{1}{d(T)} \ln \frac{1}{J}. \quad (6.47)$$

В этом случае уравнение (6.37) принимает вид

$$A(T) - \frac{1}{d(T)} \frac{1}{J} = 0$$

и значит, имеет следующее формальное решение

$$J = \frac{1}{A(T)d(T)}. \quad (6.48)$$

Оно вполне приемлемо только при положительном  $A(T)$  и теряет смысл при отрицательном  $A(T)$ . Таким образом, потенциал (6.47) не является универсальным.

Рассмотренный пример замечателен тем, что это, по существу, случай идеального газа. Чтобы убедиться в этом положим

$$\frac{1}{d(T)} = \frac{\rho_0 RT}{\mu} \quad (6.49)$$

и учтем (2.8) из учебного пособия [7].

Тогда потенциал (6.47) примет вид

$$w = \frac{\rho_0 RT}{\mu} \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Сравнивая его с (1.107) из учебного пособия [8], убеждаемся в их тождественности. Далее, любое напряжение в газе, в том числе и начальное, представляет собой давление, т.е.

$$A(T) = -p_0.$$

В этом случае уравнение (6.48) при учете (6.49) принимает вид

$$J = -\frac{\rho_0 RT}{p_0 \mu} = -1.$$

Справа стоит отрицательная величина, а слева должна быть положительная. Так что, последнее уравнение действительно не имеет решения. Это отражает тот известный факт, что напряжение в газе никогда не может быть равным нулю, так что постановка задачи о свободном тепловом расширении не имеет смысла.

#### 6.4. Термовязкий материал

Реологическая модель такого материала изображена на рис. 6.2б. Это последовательное соединение элемента теплопроводности и элемента чистой вязкости. Условия соединения элементов имеют такой же вид, как и в случае термоупругого материала. Это уравнения (6.13). Определяющие уравнения теплопроводящего элемента модели имеют такой же вид, как и в разделе 6.3. Это уравнения (6.14) и (6.15). Далее, кинематические условия соединения элементов модели имеют вид (6.16) и (6.17).

Дальнейшее рассмотрение проведем отдельно для случая линейного и нелинейного вязких элементов материала.

##### 1. Линейный вязкий элемент

Линейное описание вязкого элемента заимствуем из раздела 6.2. Это уравнения (6.4)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_2 = \lambda(T) I_1 \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}_2, \\ \mathbf{h} = 0, \quad \psi = 0, \quad S = 0. \end{cases} \quad (6.50)$$

Здесь

$$I_1 = I_1(\mathbf{D}_2), \quad \mathbf{d}_2 = Dev \mathbf{D}_2,$$

$\lambda$  и  $\eta$  — коэффициенты вязкости. Полагаем, что они зависят от температуры.

Запишем силовое условие соединения элементов модели

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2.$$

Оно имеет следующий вид

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A} = \lambda I_1(\mathbf{D}_2) \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}_2.$$

Во-первых, с его помощью находим пока неизвестную функцию  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \lambda I_1(\mathbf{D}_2) \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}_2,$$

а во-вторых, формулу для определения действующего напряжения

$$\Sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{I_3}} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} (\lambda I_1 (\mathbf{D}_2) \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}_2).$$

Отсюда находим

$$\sigma = \lambda I_1 (\mathbf{D}_2) \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}_2.$$

Остальные условия соединения также легко записать. В результате получаем

$$\begin{cases} \sigma = \lambda(T) I_1 (\mathbf{D}) \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}, \\ \mathbf{h} = -\frac{1}{\sqrt{I_3}} \kappa(T, |\Gamma|) \Gamma, \\ \psi = f(T), \\ S = -\frac{df}{dT}. \end{cases} \quad (6.51)$$

Таким образом, мы получили определяющие уравнения термовязкого материала. Они лишь множителем  $(\sqrt{I_3})^{-1}$  во втором уравнении отличаются от соответствующих уравнений раздела 1.7 учебного пособия [8].

## 2. Нелинейный вязкий элемент

Все рассуждения, использованные при исследовании линейного материала, сохраняют свою силу, и только уравнение (6.50) следует заменить на (6.8)

$$\begin{cases} \sigma_2 = A_0 \mathbf{E} + A_1 \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2, \\ \mathbf{h} = 0, \quad \psi = 0, \quad S = 0. \end{cases} \quad (6.52)$$

В результате определяющие уравнения нелинейного термовязкого материала принимают следующий вид

$$\begin{cases} \sigma = A_0 \mathbf{E} + A_1 \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2, \\ \mathbf{h} = -\frac{1}{\sqrt{I_3}} \kappa(T, |\Gamma|) \Gamma, \\ \psi = f(T), \\ S = -\frac{df}{dT}. \end{cases} \quad (6.53)$$

Опять оказалось, что эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений (6.51) множителем  $(\sqrt{I_3})^{-1}$  во втором уравнении (6.53).

## 6.5. Несжимаемый термопластический материал

Реологическая модель такого материала изображена на рис. 6.2в. Это последовательное соединение элемента теплопроводности и элемента идеальной пластичности.

Анализ этого случая почти полностью воспроизводит сказанное в предыдущем разделе. Нужно только заменить определяющие уравнения вязкого элемента (6.8) на определяющие уравнения идеально пластического элемента (6.11). Осуществляя эту замену, получим следующие определяющие уравнения

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A} = -p\mathbf{E} + \mathbf{s}, \\ \mathbf{h} = -\kappa(T, |\boldsymbol{\Gamma}|)\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = f(T) + \psi_p, \\ S = -\frac{df}{dT} \end{cases}$$

или, учитывая несжимаемость,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \mathbf{s}, \\ \mathbf{h} = -\kappa(T, |\boldsymbol{\Gamma}|)\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = f(T) + \psi_p, \\ S = -\frac{df}{dT}, \end{cases}$$

причем девиатор напряжений определяется уравнениями (6.12)

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \mathbf{D} = 0, & N(\mathbf{s}) < \tau_s, \\ \mathbf{d} = \mathbf{D} \neq 0, & \mathbf{s} = \tau_s \frac{\mathbf{d} + ADev(\mathbf{d}^{-1})}{N(\mathbf{d} + ADev(\mathbf{d}^{-1}))}. \end{cases}$$

Если в этих уравнениях положить  $A = 0$ , то получим определяющие уравнения несжимаемого линейного термопластического материала.

Подводя итог проведенным в последних трех разделах рассуждениям, констатируем, что определяющие уравнения термоупругого, термовязкого и термопластического материала, составленные методом реологических моделей существенно проще, чем убийственно сложные уравнения, представленные в разделах 4.4 и 5.5.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лурье А.И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 939 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 435 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
5. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.
6. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2008. — 108 с.
7. Пальмов В.А. Фундаментальные законы природы в механике деформируемых тел: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2008. — 141 с.
8. Пальмов В.А. Теория определяющих уравнений в нелинейной термомеханике деформируемых тел: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2008. — 113 с.

## Учебное пособие

**Владимир Александрович ПАЛЬМОВ**

### **ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ, ТЕРМОВЯЗКИХ И ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т. 2;  
95 3004 – научная и производственная литература

---

Подписано в печать 07.11.2008. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. 7,0. Тираж 80. Заказ

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором, в Цифровом  
типографском центре Издательства Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 550-40-14.

Тел./факс: (812) 297-57-76.