Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Замечание 1.4. Может создаться впечатление, что в определениях операций умножения все получается так просто и удобно потому, что мы просто выполняем какие-то уже известные правила. Это не так! Все в этих определениях — наша воля. Мы сознательно хотим этой простоты и удобства. Альтернативные определения будут рассмотрены ниже.

Однако, продолжим.

5. Тензорное произведение тензора $\mathbf{T}$ на вектор $\mathbf{c}$ и наоборот определим так

$$\mathbf{Tc} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \mathbf{c} = \sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{c},$$

6. $\mathbf{cT} = \mathbf{c} \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) = \sum_k \mathbf{c} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k .$

Результатом таких умножений в обоих случаях является сумма триад, а это тензор третьего ранга.

Этими определениями исчерпаны операции умножения тензоров на векторы.

Переходим к умножениям тензора на тензор.

7. Скалярное произведение тензора на тензор определим так

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \cdot \left(\sum_l \mathbf{c}_l \mathbf{d}_l \right) = \sum_{k,l} \mathbf{a}_k \left(\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{c}_l \right) \mathbf{d}_l .$$

Результат такого умножения представляет тензор второго ранга.

8. По аналогии определим векторное произведение тензоров

$$\mathbf{T} \times \mathbf{P} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \times \left(\sum_l \mathbf{c}_l \mathbf{d}_l \right) = \sum_{k,l} \mathbf{a}_k \left(\mathbf{b}_k \times \mathbf{c}_l \right) \mathbf{d}_l .$$

Результат этого умножения — сумма триад, т. е. тензор третьего ранга.

9. Наконец, определяем тензорное произведение двух тензоров следующим образом

$$\mathbf{TP} = \left(\sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \right) \left(\sum_l \mathbf{c}_l \mathbf{d}_l \right) = \sum_{k,l} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{c}_l \mathbf{d}_l .$$

Получился тензор четвертого ранга.

10. Двойное скалярное произведение двух тензоров запишем так

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{P}=\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\cdot\cdot\left(\sum_l \mathbf{c}_l\mathbf{d}_l\right).$$

Задумаемся над тем, как сделать так, чтобы результат был попроще. Полагаем, что первая точка в символе $\cdot\cdot$ относится к ближайшим векторам, а вторая к дальним. Результат запишем так

$$\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{P}=\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\cdot\cdot\left(\sum_l \mathbf{c}_l\mathbf{d}_l\right)=\sum_{k,l}\left(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{c}_l\right)\left(\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{d}_l\right).$$

Результатом такого умножения двух тензоров является скаляр.

11. По аналогии введем двойное векторное произведение тензоров

$$\mathbf{T}\times\times\mathbf{P}=\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\times\times\left(\sum_l \mathbf{c}_l\mathbf{d}_l\right).$$

В целях введения максимального удобства и порядка объявляем, что первый знак умножения в символе $\times\times$ относится к ближайшим векторам, а второй — к дальним. Приходим к такому определению

$$\mathbf{T}\times\times\mathbf{P}=\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\times\times\left(\sum_l \mathbf{c}_l\mathbf{d}_l\right)=\sum_{k,l}\left(\mathbf{b}_k\times\mathbf{c}_l\right)\left(\mathbf{a}_k\times\mathbf{d}_l\right).$$

Как видно, результат векторного умножения ближайших векторов действительно поставлен на первое место, а векторное произведение дальних векторов поставлено на второе. Результат такого умножения — сумма диад, т. е. тензор второго ранга.

Рассмотрим еще два произведения: векторно-скалярное и скалярно-векторное произведение двух тензоров.

12. Векторно-скалярное произведение определим так

$$\mathbf{T}\times\cdot\mathbf{P}=\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\times\cdot\left(\sum_l \mathbf{c}_l\mathbf{d}_l\right)=\sum_{k,l}\left(\mathbf{b}_k\times\mathbf{c}_k\right)\left(\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{d}_l\right).$$

13. Аналогично определим скалярно-векторное произведение

$$\mathbf{T}\cdot\times\mathbf{P}=\left(\sum_k \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\right)\cdot\times\left(\sum_l \mathbf{c}_l\mathbf{d}_l\right)=\sum_{k,l}\left(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{c}_k\right)\left(\mathbf{a}_k\times\mathbf{d}_l\right).$$

Результаты умножения в двух последних случаях представляют собой векторы, конечно, разные.

Во всех введенных определениях мы выдержали главный принцип: первый знак в символе двойного умножения относится к ближайшим век-

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

торам и результат умножения ставится на первое место; второй знак относится к дальним векторам, причем этот последний результат ставится на второе место в полученном произведении.

Замечание 1.5. создается впечатление, что двойные операции умножения можно было бы определить иначе. Это действительно так, но разговор об этом всем будет ниже.

Замечание 1.6. Легко заметить, что знак суммирования по k и по l не играет существенной роли в приведенных определениях. Главное это то, что нужно сделать с каждой диадой в тензоре. А результаты умножений всех диад, конечно, нужно суммировать. Но это уже очевидно и так. Суть различных операций в том, как нужно поступать с диадами тензоров, Но это можно записать отдельно на примере представления тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ отдельными диадами, т. е. принимая

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{cd}. \tag{1.32}$$

В этом случае определения различных операций умножения существенно упрощаются, Ниже привожу эти упрощенные определения для всех операций умножения

1. $\mathbf{T}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$,
2. $\mathbf{c}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{ab}) = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$,
3. $\mathbf{T}\times\mathbf{c} = (\mathbf{ab})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$,
4. $\mathbf{c}\times\mathbf{T} = \mathbf{c}\times(\mathbf{ab}) = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b}$,
5. $\mathbf{Tc} = (\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{abc}$,
6. $\mathbf{cT} = \mathbf{c}(\mathbf{ab}) = \mathbf{cab}$,
7. $\mathbf{T}\cdot\mathbf{P} = (\mathbf{ab})\cdot(\mathbf{cd}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}$,
8. $\mathbf{T}\times\mathbf{P} = (\mathbf{ab})\times(\mathbf{cd}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{d}$,
9. $\mathbf{TP} = (\mathbf{ab})(\mathbf{cd}) = \mathbf{abcd}$,
10. $\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{P} = (\mathbf{ab})\cdot\cdot(\mathbf{cd}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$,
11. $\mathbf{T}\times\times\mathbf{P} = (\mathbf{ab})\times\times(\mathbf{cd}) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})$,
12. $\mathbf{T}\times\cdot\mathbf{P} = (\mathbf{ab})\times\cdot(\mathbf{cd}) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$,
13. $\mathbf{T}\cdot\times\mathbf{P} = (\mathbf{ab})\cdot\times(\mathbf{cd}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})$.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Получилась таблица, напоминающая таблицу умножения чисел. Ее нужно запомнить и знать! А процесс запоминания упрощают два главных принципа, заложенных в основу ее составления.

1. При однократных умножениях умножаются только ближайшие векторы, тогда как остальные оставляются на своих местах слева и справа от произведений.

2. При двойных умножениях действуют правила: первый знак умножения относится к ближайшим векторам, а второй — к дальним; первый результат ставится на первое место в полученном результате, а второй — на второе.

Эти принципы еще легче запомнить, чем даже всю таблицу.

Замечание 1.7. Двойные операции можно ввести иначе. Будем, например, считать, что первый знак относится к первым векторам диад, а второй — ко вторым. Но тогда придется и изменить обозначения:

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\cdot \\ \cdot}} \mathbf{P} = (\mathbf{ab}) \mathbin{\substack{\cdot \\ \cdot}} (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}),$$

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\times \\ \times}} \mathbf{P} = (\mathbf{ab}) \mathbin{\substack{\times \\ \times}} (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d}),$$

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\times \\ \cdot}} \mathbf{P} = (\mathbf{ab}) \mathbin{\substack{\times \\ \cdot}} (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}),$$

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\cdot \\ \times}} \mathbf{P} = (\mathbf{ab}) \mathbin{\substack{\cdot \\ \times}} (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d}).$$

Легко получить связи этих произведений с введенными выше. Они таковы

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\cdot \\ \cdot}} \mathbf{P} = \mathbf{T}^T \cdot\cdot\, \mathbf{P},$$

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\times \\ \times}} \mathbf{P} = \mathbf{T}^T \times\times\, \mathbf{P},$$

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\times \\ \cdot}} \mathbf{P} = \mathbf{T}^T \times\cdot\, \mathbf{P},$$

$$\mathbf{T} \mathbin{\substack{\cdot \\ \times}} \mathbf{P} = \mathbf{T}^T \cdot\times\, \mathbf{P}.$$

1.6. Свойства операций умножения тензоров на векторы и тензоров на тензоры

При изучении свойств произведений будем использовать простейшие представления тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ по (1.32). Рассмотрим последовательно несколько произведений

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

1. $\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{c}$ (1.33)

Чтобы доказать это равенство, вычислим последовательно левую и правую части этого равенства. Имеем

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{ab})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b},$$

$$\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{ba})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}).$$

Легко видеть, что они равны. По аналогии имеем еще одно равенство

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}^T=\mathbf{T}\cdot\mathbf{c}. \tag{1.34}$$

2. $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{d}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{d}$ (1.35)

Вычислим последовательно первое и второе произведения. Имеем

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{d})=\mathbf{c}\cdot((\mathbf{ab})\cdot\mathbf{d})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}))=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}),$$

$$(\mathbf{c}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{c}\cdot(\mathbf{ab}))\cdot\mathbf{d}=((\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}).$$

Видим, что они равны. Это означает, что при умножении тензора на векторы справа и слева порядок проведения умножений несущественен! Это и отражено в последнем выражении (1.35): скобки опущены, ибо они не нужны фактически.

По аналогии имеем равенства

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{T}\times\mathbf{d})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{T})\times\mathbf{d}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}\times\mathbf{d},$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{T}\times\mathbf{d})=(\mathbf{c}\times\mathbf{T})\times\mathbf{d}=\mathbf{c}\times\mathbf{T}\times\mathbf{d},$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{T}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{c}\times\mathbf{T})\cdot\mathbf{d}=\mathbf{c}\times\mathbf{T}\cdot\mathbf{d}.$$

3. $\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{c}$ (1.36)

Действительно, по (1.34) имеем

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}^T=\mathbf{T}\cdot\mathbf{c}.$$

Подстановка в левую часть равенства дает

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{T}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}.$$

В полученном выражении усматриваем скалярное произведение векторов $(\mathbf{T}\cdot\mathbf{c})$ и $\mathbf{d}$. Меняя порядок их следования, получаем

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{T}\cdot\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{c}).$$

Сравнивая это выражение с (1.35), замечаем, что скобки могут быть опущены и мы получаем

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{d}=\mathbf{d}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{c}.$$

Таким образом, мы доказали справедливость равенства (1.36).

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

4. $\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{T}\cdot\cdot(\mathbf{dc})=(\mathbf{dc})\cdot\cdot\mathbf{T}$ (1.37)

Последовательно вычисляем каждый член этого предполагаемого равенства

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}),$$
$$\mathbf{T}\cdot\cdot(\mathbf{dc})=(\mathbf{ab})\cdot\cdot(\mathbf{dc})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{dc})\cdot\cdot\mathbf{T}=(\mathbf{dc})\cdot\cdot(\mathbf{ab})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}).$$

Сравнивая, убеждаемся, что все эти величины равны друг другу. Так что (1.37) действительно, имеет место. По аналогии находим

$$\begin{aligned}&\mathbf{c}\cdot\mathbf{T}\times\mathbf{d}=\mathbf{T}\times\cdot\,\mathbf{dc}=-\mathbf{dc}\cdot\times\mathbf{T},\\&\mathbf{c}\times\mathbf{T}\cdot\mathbf{d}=-\mathbf{T}\cdot\times\mathbf{dc}=\mathbf{dc}\times\cdot\,\mathbf{T},\\&\mathbf{c}\times\mathbf{T}\times\mathbf{d}=-\mathbf{T}\times\times\mathbf{dc}=-\mathbf{dc}\times\times\mathbf{T}.\end{aligned}\tag{1.38}$$

5. $(\mathbf{c}\times\mathbf{T})^T=-\mathbf{T}^T\times\mathbf{c}$

Вычислим по отдельности левую и правую части этого предполагаемого равенства

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{T})^T=(\mathbf{c}\times(\mathbf{ab}))^T=((\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b})^T=\mathbf{b}(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),$$
$$-\mathbf{T}^T\times\mathbf{c}=-(\mathbf{ab})^T\times\mathbf{c}=-(\mathbf{ba})\times\mathbf{c}=-\mathbf{b}(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{c}\times\mathbf{a}).$$

Видим, что они равны.

6. $(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P})^T=\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{T}^T$ (1.39)

Это равенство доказывает следующая цепочка равенств

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P})^T=((\mathbf{ab})\cdot(\mathbf{cd}))^T=(\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d})^T=$$
$$=\mathbf{d}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}=(\mathbf{dc})\cdot\mathbf{ba}=\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{T}^T.$$

7. $\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}\cdot\cdot\mathbf{T}$ (1.40)

В этом убеждаемся простым вычислением

$$(\mathbf{ab})\cdot\cdot(\mathbf{cd})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{cd})\cdot\cdot(\mathbf{ab}).$$

Аналогичное вычисление, а именно

$$(\mathbf{ab})\cdot\cdot(\mathbf{cd})=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{ba})\cdot\cdot(\mathbf{dc})$$

приводит к другому важному равенству

8. $\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{P}=\mathbf{T}^T\cdot\cdot\mathbf{P}^T$ (1.41)

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

9. Рассмотрим теперь два разных тензора: симметричный $\mathbf{S}$ и антисимметричный $\mathbf{A}$. По определениям (1.20) и (1.21) они удовлетворяют следующим тождествам

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S}, \qquad \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}. \tag{1.42}$$

Составим двойное скалярное произведение этих тензоров

$$\lambda = \mathbf{S} \cdot\cdot\, \mathbf{A}. \tag{1.43}$$

Используя (1.41), получим

$$\lambda = \mathbf{S} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = \mathbf{S}^T \cdot\cdot\, \mathbf{A}^T.$$

В силу (1.42) оно преобразуется к виду

$$\lambda = \mathbf{S} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = -\mathbf{S} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = -\lambda.$$

Но если число λ равно своему противоположному числу $(-\lambda)$, то оно может быть только нулем. Так что приходим к тождеству

$$\mathbf{S} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = 0.$$

Но по (1.41) имеем также и второе тождество типа (1.43), когда тензоры $\mathbf{S}$ и $\mathbf{A}$ следуют в обратном порядке, так что

$$\mathbf{S} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{S} = 0. \tag{1.44}$$

10. $\mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{P} = \mathbf{T}^S \cdot\cdot\, \mathbf{P}^S + \mathbf{T}^A \cdot\cdot\, \mathbf{P}^A,$ (1.45)

где $\mathbf{T}^S$ и $\mathbf{P}^S$ — симметричные части тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$, а $\mathbf{T}^A$ и $\mathbf{P}^A$ — антисимметричные.

Действительно, используя разложения типа (1.22)

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A,$$

можем записать произведение тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{P} &= \left(\mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{P}^S + \mathbf{P}^A\right) = \\ &= \mathbf{T}^S \cdot\cdot\, \mathbf{P}^S + \mathbf{T}^A \cdot\cdot\, \mathbf{P}^S + \mathbf{T}^S \cdot\cdot\, \mathbf{P}^A + \mathbf{T}^A \cdot\cdot\, \mathbf{P}^A. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Но в силу (1.44) второе и третье слагаемые равны нулю. И тогда тождество (1.46) подтверждает справедливость утверждения (1.45).

11. Рассмотрим теперь ситуации, когда один из тензоров в двойном скалярном произведении представляет скалярное произведение двух тензоров. Говоря более определенно, мы предполагаем доказать следующие тождества

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}) \cdot\cdot\, \mathbf{\Lambda} = \mathbf{T} \cdot\cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{P} \cdot\cdot (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T}), \tag{1.47}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе: Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{T}\cdot\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Lambda}) = (\mathbf{T}\cdot\mathbf{P})\cdot\cdot\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{T})\cdot\cdot\mathbf{P}. \tag{1.48}$$

Доказательства строим, используя простейшие представления тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{P}$ по (1.32), а также столь же простое представление тензора $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{ef}. \tag{1.49}$$

Используя их, вычислим последовательно все выражения, входящие в тождества (1.47) и (1.48)

$$(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P})\cdot\cdot\mathbf{\Lambda} = ((\mathbf{ab})\cdot(\mathbf{cd}))\cdot\cdot(\mathbf{ef}) = (\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d})\cdot\cdot\mathbf{ef} = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}),$$

$$\mathbf{T}\cdot\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{\Lambda}) = (\mathbf{ab})\cdot\cdot((\mathbf{cd})\cdot(\mathbf{ef})) = (\mathbf{ab})\cdot\cdot(\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{f})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}),$$

$$\mathbf{P}\cdot\cdot(\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{T}) = (\mathbf{cd})\cdot\cdot((\mathbf{ef})\cdot(\mathbf{ab})) = (\mathbf{cd})\cdot\cdot(\mathbf{e}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}) = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}),$$

$$(\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{T})\cdot\cdot\mathbf{P} = ((\mathbf{ef})\cdot(\mathbf{ab}))\cdot\cdot(\mathbf{cd}) = (\mathbf{e}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b})\cdot\cdot(\mathbf{cd}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a}).$$

Конечно, оказалось, что все члены, входящие в тождества (1.47) и (1.48), равны друг другу! Это доказывает справедливость последних.

Самое главное, что нужно вынести из этого раздела — это принцип доказательства: использование простейших представлений тензоров по (1.32) и (1.49) и определений операций умножения.

1.7. Единичный тензор и тензор Леви – Чивита

Произвольным образом введем три ортогональных единичных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Сказанное означает, что они удовлетворяют условиям

$$\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_l = \delta_{kl},$$

где δ_{kl} — символ Кронекера: $\delta_{kl}=0$, если $k\neq l$; $\delta_{kl}=1$, если $k=l$.

Образуем тензор

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k \tag{1.50}$$

и назовем его единичным.

Полагаем, что в определении (1.50) $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k$ подчиняется правилу Эйнштейна: суммированию по дважды повторяющемуся индексу от 1 до 3.

Чтобы понять причину названия тензора $\mathbf{E}$ — единичный — составим произведение его на некоторый вектор $\mathbf{a}$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k)\cdot\mathbf{a} = \mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{a}) = \mathbf{e}_k a_k, \quad a_k = \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{a}.$$

Здесь в скобках оказались проекции вектора $\mathbf{a}$ на орты $\mathbf{e}_k$. Что же стоит здесь в правой части? Это сумма ортов $\mathbf{e}_k$, умноженных на соответ-

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

ствующие проекции вектора $\mathbf{a}$ на направления ортов. Но ведь эта сумма представляет собой вектор $\mathbf{a}$! Так что имеем

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}. \tag{1.51}$$

Так же легко доказать и другое равенство

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{a}. \tag{1.52}$$

Составим теперь произведение единичного тензора $\mathbf{E}$ на тензор $\mathbf{T}$ и докажем тождество

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{T}. \tag{1.53}$$

Доказательство строим, используя простейшее представление тензора $\mathbf{T}$ в виде диады $\mathbf{ab}$. Имеем

$$\mathbf{E}\cdot(\mathbf{ab})=(\mathbf{E}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathbf{ab},$$

$$(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{E}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{E})=\mathbf{ab}.$$

Заменяя теперь диаду $\mathbf{ab}$ на тензор $\mathbf{T}$, убеждаемся в справедливости тождества (1.53).

Тождества (1.51), (1.52) и (1.53) оправдывают название тензора $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Замечание 1.8. К сожалению, единичный тензор не обладает такими же хорошими свойствами при векторном умножении.

Рассмотрим теперь произведение $\mathbf{E}\cdot\cdot(\mathbf{ab})$. В соответствии с тождеством (1.37) имеем

$$\mathbf{E}\cdot\cdot(\mathbf{ab})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}.$$

Учитывая теперь (1.51) и (1.40) находим, окончательно

$$\mathbf{E}\cdot\cdot(\mathbf{ab})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{ab})\cdot\cdot\,\mathbf{E}. \tag{1.54}$$

Вычислим, наконец, произведение $\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{E}$. В соответствии с определением (1.50) получаем цепочку равенств

$$\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{E}=(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k)\cdot\cdot(\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l)=\delta_{kl}\delta_{kl}=\delta_{kk}=3,$$

доказывающую тождество

$$\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{E}=3.$$

Введем теперь в рассмотрение тензор Леви – Чивита. Для этого рассмотрим векторное произведение $\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_l$. Оно представляет собой вектор. Его проекции на направления ортов $\mathbf{e}_s$ обозначим ε_{skl}. Так что, имеем

$$\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_l=\mathbf{e}_s\varepsilon_{skl}. \tag{1.55}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Умножая обе части этого равенства на $\mathbf{e}_m$, получим

$$\mathbf{e}_m \cdot \left(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l\right) = \delta_{ms}\varepsilon_{skl} = \varepsilon_{mkl}.$$

Мы получили удобную формулу для определения координат тензора Леви – Чивита в любом базисе

$$\varepsilon_{mkl} = \mathbf{e}_m \cdot \left(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l\right). \tag{1.56}$$

Везде ниже мы будем использовать только правую систему координат с ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Тогда прямые вычисления дают следующий результат

$$\begin{array}{ll} & \qquad skl \\ \varepsilon_{skl} = & \left[\begin{array}{ll} +1 & \quad 123123, \\ -1 & \quad 321321, \\ 0 & \text{при наличии равных индексов.} \end{array}\right. \end{array} \tag{1.57}$$

Понимать эту запись нужно следующим образом. Если индексы skl образуют прямую перестановку, т. е. 123 или 231, или, наконец, 312, то ε_{skl} равен $+1$ Если индексы skl образуют обратную перестановку, т. е. 321, или 213, или 132, то ε_{skl} равен -1. Если среди индексов skl есть равные, то $\varepsilon_{skl} = 0.$ Справедливость равенств (1.57) легко устанавливается непосредственным вычислением. Также непосредственным вычислением устанавливается свойство величин ε_{skl}

$$\varepsilon_{skl} = -\varepsilon_{ksl} = -\varepsilon_{slk} = -\varepsilon_{lks}. \tag{1.58}$$

Любая перестановка двух индексов приводит к изменению знака ε.

Напоминаю главные свойства правой системы координат. Если изобразить все орты, выходящими из одной точки, и с конца орта $\mathbf{e}_3$ следить за поворотом орта $\mathbf{e}_1$, до совмещения с ортом $\mathbf{e}_2$ по кратчайшему пути, то этот поворот в правой системе координат будет происходить против часовой стрелки.

Тензор Леви – Чивита определим следующим образом

$${}^3\mathbf{L} = \mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\varepsilon_{skl}. \tag{1.59}$$

Это тензор третьего ранга. Это указано цифрой 3 слева от символа тензора.

Рассмотрим векторное произведение двух единичных тензоров. По определению (1.50) и определению операций векторного умножения имеем

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{E}\times\mathbf{E}=\left(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\right)\times\left(\mathbf{e}_l\mathbf{e}_l\right)=\mathbf{e}_k\left(\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_l\right)\mathbf{e}_l.$$

Воспользовавшись разложением (1.55), преобразуем это выражение к виду

$$\mathbf{E}\times\mathbf{E}=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_l\varepsilon_{skl}.$$

Используя первое равенство (1.58), получим далее

$$\mathbf{E}\times\mathbf{E}=-\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_l\varepsilon_{ksl}.$$

Легко теперь увидеть, что в правой части образовался тензор Леви – Чивита ${}^3\mathbf{L}$ в соответствии с его определением (1.59). Приходим к представлению тензора Леви – Чивита через единичные тензоры

$$ {}^3\mathbf{L}=-\mathbf{E}\times\mathbf{E}. \tag{1.60}$$

Приведем одно из важных и полезных применений тензора Леви – Чивита. Для этого рассматриваем векторное произведение двух векторов и переписываем его, пользуясь свойствами (1.51) и (1.52) единичного тензора. Делаем это так:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}\right)\times\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{b}\right)=\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{b}.$$

Здесь встретилось векторное произведение двух единичных тензоров, которое входит также в представление тензора Леви – Чивита. Комбинируя последнюю формулу и (1.60), получим

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{a}\cdot{}^3\mathbf{L}\cdot\mathbf{b}. \tag{1.61}$$

Эта формула полезна тем, что позволяет записать операцию векторного умножения, пользуясь только двумя операциями скалярного умножения.

Рассмотрим теперь случай, когда система координат является левой. Этот случай не является типичным для последующих рассуждений. Во всем последующем будет встречаться только упоминание о нем.

Левую систему координат и соответственно, ортов можно получить из правой путем инверсии, т. е. если заменить $\mathbf{e}_1$ на $-\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на $-\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ на $-\mathbf{e}_3$. Внося эти представления в формулу (1.56) получим значения координат тензора Леви – Чивита в левой системе $\hat{\varepsilon}$

$$\hat{\varepsilon}_{mkl}=\left(-\mathbf{e}_m\right)\cdot\left(\left(-\mathbf{e}_k\right)\times\left(-\mathbf{e}_l\right)\right)=-\varepsilon_{mkl}.$$

Оказалось, что координаты тензора Леви – Чивита в левой системе координат только знаком отличаются от соответствующих координат тензора Леви – Чивита правой системы координат.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

1.8. Вектор, сопутствующий тензору второго ранга

Пусть имеется некий тензор второго ранга $\mathbf{T}$. Используем его представление в виде суммы диад (1.31)

$$\mathbf{T} = \sum_k \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k .$$

Вектором, сопутствующим этому тензору, называем следующий вектор

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \sum_k \mathbf{a}_k \times \mathbf{b}_k .$$

Найдем формулу для конструктивного вычисления сопутствующего вектора непосредственно по тензору $\mathbf{T}$, минуя его разложение на сумму диад. Все вычисления и рассуждения будем проводить, используя простейшее представление тензора $\mathbf{T}$ (1.32) в виде одной диады

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab}.$$

Запишем вектор, сопутствующий этому тензору и преобразуем его выражение, пользуясь свойством (1.51) единичного тензора. Получим следующее выражение

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{b},$$

которое можно записать иначе

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2} \mathbf{ba} \times \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{ab} \right)^T \times \cdot \mathbf{E}.$$

Соответствующая формула для произвольного тензора $\mathbf{T}$ имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \times \cdot \mathbf{E}. \tag{1.62}$$

Это первое выражение для сопутствующего вектора. Найдем другое. Для этого перепишем выражение сопутствующего вектора диады $\mathbf{ab}$, изменив порядок следования векторов в векторном произведении

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\frac{1}{2} \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Вектор $\mathbf{a}$ здесь заменим его представлением (1.51). Получим новое выражение:

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}\times\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{a}\right),$$

которое можно переписать и так:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = -\frac{1}{2}\mathbf{b}\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{ab}\right)\times\cdot\mathbf{E}.$$

Опять в правой части выделилась диада $\mathbf{ab}$, так что обобщение на произвольный тензор имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}} = -\frac{1}{2}\mathbf{T}\times\cdot\,\mathbf{E}. \tag{1.63}$$

А теперь сложим правые и левые части тождеств (1.62) и (1.63) и поделим результат пополам. Получим третье представление сопутствующего вектора

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\mathbf{T}-\mathbf{T}^{T}\right)\times\cdot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\mathbf{T}^{A}\times\cdot\,\mathbf{E}. \tag{1.64}$$

Оно является самым информативным. Оно показывает, что сопутствующий вектор определяется только антисимметричной частью тензора, а симметричная часть вообще не влияет на сопутствующий вектор. Более того, сопутствующий вектор симметричного тензора просто равен нулю. А что можно сказать про тензор, если сопутствующий ему вектор равен нулю? Ни одна из формул (1.62), (1.63) и (1.64) не дает ответа на этот простой вопрос. Нужна новая формула. Чтобы ее получить, составим векторное произведение единичного тензора на левую и правую части равенства, выражающего сопутствующий вектор

$$\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \mathbf{E}\times\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right).$$

А теперь воспользуемся представлением единичного тензора (1.50). Получим

$$\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\right)\times\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_k\left(\mathbf{e}_k\times\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\right).$$

В скобке здесь оказалось двойное векторное произведение трех векторов. Его преобразуем, используя знаменитую формулу векторного исчисления

$$\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right) = \mathbf{B}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\right) - \mathbf{C}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right), \tag{1.65}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — векторы.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Получим следующий результат

$$\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_k\left(\mathbf{a}\left(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{b}\right)-\mathbf{b}\left(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{a}\right)\right).$$

Во внутренних скобках оказались скаляры. Эти скаляры можно передать от правых векторов диад левым. Результат этой передачи таков

$$\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_k\left(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{b}\right)\mathbf{a}-\mathbf{e}_k\left(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{a}\right)\mathbf{b}\right)$$

или

$$\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{ba}-\mathbf{ab}\right) = -\left(\mathbf{ab}\right)^A.$$

Отсюда находим антисимметричную часть $\mathbf{ab}$

$$\left(\mathbf{ab}\right)^A = -\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{ab}}.$$

Обобщая последние две формулы на случай произвольного тензора $\mathbf{T}$, получим искомые обратные формулы

$$\mathbf{T}^A = -\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}}\times\mathbf{E} = -\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{T}}. \tag{1.66}$$

Два факта следуют из этих формул:

1. Сопутствующий вектор определяет только антисимметричную часть тензора.

2. Если сопутствующий вектор некоторого тензора равен нулю, то антисимметричная часть этого тензора равна нулю, т. е. тензор является симметричным.

1.9. Тензорный базис. Координаты тензора

Рассмотрим диаду $\mathbf{ab}$. Входящие в нее векторы представим в ортогональном и нормированном базисе

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_k a_k, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{i}_l b_l. \tag{1.67}$$

Здесь $\mathbf{i}_k$ элементы векторного базиса, они ортогональны и нормированы, так что

$$\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_l = \delta_{kl}, \tag{1.68}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

Напоминаем, что в формулах (1.67), в соответствии с правилом Эйнштейна, проводится суммирование по повторяющимся индексам k и l от 1

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

до 3. Величины a_k и b_k называются координатами векторов **a** и **b**. Подставим теперь разложения (1.67) в выражение диады **ab** и воспользуемся соотношениями эквивалентности и определениями линейных операций. Получим следующий результат

$$\mathbf{ab} = \left(\mathbf{i}_k a_k\right)\left(\mathbf{i}_l b_l\right) = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\ a_k b_l .$$

Представляя в такой же форме и остальные диады, входящие в выражение тензора, придем к заключению, что всякий тензор второго ранга может быть представлен в виде следующего разложения

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\ T_{kl} . \qquad (1.69)$$

Комбинации $\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$ называются элементами тензорного базиса. Их девять штук. Величины T_{kl} называются координатами тензора. Их тоже девять. Так что, в формуле (1.69) содержится девять слагаемых.

Теорема 1.2. Элементы тензорного базиса $\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$ линейно независимы.

Утверждение этой теоремы очень важно, ибо означает, что число элементов базиса нельзя уменьшить. Вопрос о линейной зависимости или о линейной независимости решается следующим образом. Составляем линейную комбинацию и записываем равенство

$$\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\alpha_{kl} = 0. \qquad (1.70)$$

Если окажется, что это равенство возможно при $\alpha_{kl} \neq 0,$ то элементы базиса $\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$ линейно зависимы, а если это возможно только при $\alpha_{kl} = 0$ $(k = 1,2,3,\ l = 1,2,3)$ то они линейно независимы.

Доказательство построим методом от противного. Допускаем, что равенство (1.70) возможно при

$$\alpha_{kl} \neq 0 \qquad (1.71)$$

хотя бы при каких-нибудь значениях k и l.

Запишем равенство (1.70) в следующем виде

$$\mathbf{i}_k\mathbf{A}_k = 0, \qquad (1.72)$$

где $\mathbf{A}_k$ — вектор, равный

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{i}_l\alpha_{kl} . \qquad (1.73)$$

Умножим обе части равенства (1.72) на $\mathbf{i}_m$ слева. Получим

$$\mathbf{i}_m \cdot \left(\mathbf{i}_k\mathbf{A}_k\right) = \mathbf{i}_m \cdot 0 = 0.$$

Перемножая величины, стоящие в левой части, придем к уравнениям

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{A}_m = 0, \qquad m = 1,2,3.$$

В силу обозначения (1.73) перепишем эти равенства следующим образом

$$\mathbf{i}_l \alpha_{ml} = 0, \qquad m = 1,2,3.$$

Обращаем внимание на то, что элементы $\boldsymbol{i}_k$ векторного базиса линейно независимы. А это значит, что последние равенства возможны только при

$$\alpha_{ml} = 0, \qquad m,l = 1,2,3. \tag{1.74}$$

Итак, мы пришли к противоречию: (1.74) противоречит нашему предположению (1.71). Равенства (1.74) — это факт, являющийся строгим следствием главного равенства (1.70). Вместе с тем, условия (1.71) это всего лишь наше предположение: оно и должно быть отвергнуто. Таким образом, теорема 1.2 доказана. Это означает, что число слагаемых в представлении тензора (1.69) не может быть сокращено. Следовательно, в некотором фиксированном базисе тензор второго ранга полностью определяется матрицей его координат порядка 3×3

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Замечание 1.8. Мы назвали величины T_{kl} координатами по аналогии с координатным векторным исчислением. Однако, в литературе используют другое название — компоненты. Я решительно против этого последнего названия. По моему мнению компоненты это то, что входит составляющей частью. Но ведь компонентами тензора (1.69) являются следующие выражения

$$\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}, \qquad \left(\not\sum_{k,l} \right).$$

Так что компонентой мы называем координату, умноженную на соответствующий элемент базиса! Напоминаю, что знак суммирования с косой чертой означает: не суммировать по k и l.

Как же можно объяснить отличие введенной здесь терминологии от терминологии, используемой во всей литературе? Первоначальное понятие тензора второго ранга ассоциировалось с понятием матрицы, и тогда тер-

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

мин компонента тензора «T_{kl}» был вполне оправдан, ибо действительно T_{kl} являлся составной частью матрицы компонент тензора T_{kl}.

Мы же под тензором второго ранга понимаем сумму диад (1.69) и поэтому компонентой его является диада $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}$, $\left(\cancel{\sum_{k}} \right)$, а уж никак не T_{kl}. Это означает, что величины T_{kl} должны быть названы как-то иначе. И действительно они и названы иначе — это «координаты». Кстати, это название вполне хорошо соответствует широко используемому названию — «координатное тензорное исчисление». Все логично: в «координатном тензорном исчислении» оперируем «координатами» тензора, а уж никак не «компонентами». Более того, нигде не используется термин «компонентное тензорное исчисление» для названия такого тензорного исчисления, в котором оперируют «компонентами».

Обратимся теперь к представлению (1.69). В нем 9 слагаемых, точнее говоря, 9 диад. Возникает вопрос: можно ли уменьшить число диад. Ответ простой: конечно, можно! И даже неединственным образом. Предлагаем два таких представления

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_k \mathbf{T}_k = \tilde{\mathbf{T}}_l \mathbf{i}_l, \tag{1.75}$$

где введены векторы

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{i}_l \mathbf{T}_{kl}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_l = \mathbf{i}_k \mathbf{T}_{kl}. \tag{1.76}$$

Последнее, о чем следует поговорить — это о тензорах высших рангов. Как здесь поступить? А также!

Вводим полиаду

$$\underbrace{\mathbf{abcd}\ldots}_{n \text{ штук}}$$

Каждый вектор полиад разлагаем по элементам векторного базиса $\mathbf{i}_k$ и вносим в полиады. По аналогии с тензором второго ранга формируем соотношения эквивалентности. В конце концов, приходим к следующему представлению тензора n-го ранга

$${}^{n}\mathbf{T} = \underbrace{\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \ldots}_{n \text{ штук}} \quad \underbrace{T_{klm\ldots}}_{n \text{ чисел}}. \tag{1.77}$$

Тензорный базис содержит 3^n элементов. Столько же имеется координат.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

1.10. Основные формулы координатного тензорного исчисления

Главный результат предыдущего раздела состоит в следующем: в некотором фиксированном векторном базисе и порожденных им тензорных базисах векторы и тензоры однозначно задаются матрицами своих координат. Поэтому в вычислениях и в рассуждениях можно временно опустить базисы и оперировать только с координатами. Тензорное исчисление, оперирующее только координатами векторов и тензоров называется координатным тензорным исчислением. Ниже приводятся основные формулы этого исчисления. Они являются аналогами соответствующих формул прямого тензорного исчисления.

1. Сумма двух тензоров

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + \mathbf{P}. \tag{1.78}$$

Все входящие в это равенство тензоры записываем в одном и том же базисе

$$\mathbf{S} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l S_{kl}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l P_{kl}. \tag{1.79}$$

Подставляем эти разложения в (1.78)

$$\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l S_{kl} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl} + \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l P_{kl}.$$

Пользуясь соотношениями эквивалентности, преобразуем правую часть этого равенства. Получаем

$$\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l S_{kl} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \left(T_{kl} + P_{kl} \right). \tag{1.80}$$

Поскольку элементы тензорного базиса линейно независимы справедливо суждение: если два тензора равны, то равны и их соответствующие координаты. Следовательно, имеем

$$S_{kl} = T_{kl} + P_{kl}. \tag{1.81}$$

Если возникает сомнение в процитированном суждении, то убедиться в его справедливости можно следующим образом. Перенесем члены правой части равенства (1.80) в левую и объединим соответствующие слагаемые. Тогда получим

$$\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \left(S_{kl} - T_{kl} - P_{kl} \right) = 0.$$

Обозначаем координаты тензора стоящего в левой части α_{kl} и находим

$$\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \alpha_{kl} = 0, \qquad \alpha_{kl} = S_{kl} - T_{kl} - P_{kl}.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Последнее равенство является решающим в решении вопроса о линейной независимости тензорного базиса. В предыдущем разделе было доказано, что равенство имеет место только при $\alpha_{kl} = 0$. Так что, имеем

$$\alpha_{kl} = S_{kl} - T_{kl} - P_{kl} = 0$$

или

$$S_{kl} = T_{kl} + P_{kl}.$$

Мы опять получаем равенство (1.81). Оно представляет собой определение суммы двух тензоров второго ранга в координатном тензорном исчислении. Это аналог определения суммы в прямом тензорном исчислении (1.78). Сравним записи (1.78) и (1.81). На написание первой истрачено пять типографических знаков, тогда как на написание второй — одиннадцать, т. е. почти в два раза больше. Но дело не только в этом. В (1.81) используются нижние индексы, которые обычно набираются более мелким шрифтом, чем другие знаки. Это естественным образом затрудняет чтение и написание. Проведенное сравнение убедительно демонстрирует преимущество прямого тензорного исчисления над координатным: при выполнении рассуждений общего характера, когда не нужна детализация, прямое тензорное исчисление более удобно. Конечно, когда возникает необходимость в детализации, обращение к координатному тензорному исчислению неизбежно.

2. Умножение тензора на число

Определение этой операции в прямом тензорном исчислении содержится в равенстве (1.6). Применяя ее к разложению тензора $\mathbf{T}$ по (1.79), получим

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{T} = \alpha\left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right) = \left(\alpha\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{i}_l T_{kl}\right). \tag{1.82}$$

Но по третьему соотношению эквивалентности числовой множитель α можно передать от первого вектора диады второму. Тогда получим

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{T} = \mathbf{i}_k\left(\mathbf{i}_l \alpha T_{kl}\right),$$

и наконец,

$$\mathbf{P} = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\left(\alpha T_{kl}\right).$$

Отсюда уже легко находим, что координаты тензора $\mathbf{P}$ таковы:

$$P_{kl} = \alpha T_{kl}. \tag{1.83}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

При умножении тензора на число, нужно умножить на это число все координаты тензора.

Сравнение первого равенства (1.82) и равенства (1.83) опять демонстрирует преимущество прямого тензорного исчисления над координатным аналогом: на запись первого равенства (1.82) истрачено 4 типографских знака, а на написание (1.83) — восемь, т. е. в два раза больше.

3. Транспонированный тензор

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^T = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right)^T = \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k T_{kl}. \qquad (1.84)$$

В соответствии с определением (1.3) вторые векторы всех диад поставлены на первое место, а первые — на второе. А теперь обратим внимание на то, что индексы l и k в полученном выражении (1.84) являются индексами суммирования. Их можно заменить на какие-нибудь другие, например, на m и n: результат вычисления суммы в (1.84) от такой замены не изменится. Ведь и по тем и по другим индексам ведется суммирование от 1 до 3! Но ведь можно поступить иначе: индекс l заменить на k и одновременно индекс k заменить на l. И от этой замены значение (1.84) тоже не изменится. Изменится только написание. Так и поступим и в результате получим

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^T = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{lk}.$$

Отсюда уже видно, что

$$P_{kl} = T_{lk}, \qquad (1.85)$$

т. е. матрица координат транспонированного тензора равна транспонированной матрице транспонируемого тензора.

4. Симметричный и антисимметричный тензоры

Если тензор $\mathbf{T}$ симметричный, то его координаты T_{lk} равны координатам транспонированного, т. е. (1.85). Это определение приводит к равенствам

$$T_{kl} = T_{lk}. \qquad (1.86)$$

Здесь содержится три тождества:

$$T_{11} = T_{11}, \qquad T_{22} = T_{22}, \qquad T_{33} = T_{33},$$

три равенства:

$$T_{21} = T_{12}, \quad T_{31} = T_{13}, \quad T_{23} = T_{32}, \qquad (1.87)$$

и, наконец, еще три равенства:

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$T_{12} = T_{21}, \quad T_{13} = T_{31}, \quad T_{32} = T_{23},$$

которые повторяют равенства (1.87).

Оказалось, что содержательных равенств в (1.86) всего три! Матрица координат симметричного тензора $\mathbf{S}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}.$$

Она определяется шестью значимыми числами: элементами, стоящими на главной диагонали и элементами, стоящими над ней. Элементы, стоящие под главной диагональю, повторяют значения стоящих над ней.

Если тензор $\mathbf{T}$ является антисимметричным, то координаты транспонированного тензора T_{lk} равны взятыми со знаком минус координатам T_{kl} тензора $\mathbf{T}$. По этому определению имеем

$$T_{lk} = -T_{kl}. \tag{1.88}$$

Если взять $l = k$, то получим из (1.88)

$$T_{11} = -T_{11}, \quad T_{22} = -T_{22}, \quad T_{33} = -T_{33}.$$

Отсюда следует, что диагональные координаты антисимметричного тензора равны нулю:

$$T_{11} = 0, \quad T_{22} = 0, \quad T_{33} = 0.$$

Далее (1.88) дает две группы равенств

$$T_{21} = -T_{12}, \quad T_{31} = -T_{13}, \quad T_{32} = -T_{23} \tag{1.89}$$

и

$$T_{12} = -T_{21}, \quad T_{13} = -T_{31}, \quad T_{23} = -T_{32}. \tag{1.90}$$

Вторая группа равенств, т. е. (1.90) полностью повторяет (1.89). Матрица координат антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Она определяется только тремя элементами, стоящими над главной диагональю; элементы, стоящие под главной диагональю, равны соответствующим элементам, стоящим над главной диагональю, со знаком минус. А на главной диагонали — одни нули!

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

5. Разложение тензора на симметричную и антисимметричную части

Теорема 1.1 представляет содержание этой проблемы. Говоря конкретнее, нам предстоит записать в координатной форме равенства (1.22), (1.23) и (1.24). В соответствии с определением суммы тензоров в координатном тензорном исчислении (1.81) имеем

$$T_{kl} = T_{kl}^S + T_{kl}^A, \tag{1.91}$$

$$T_{kl}^S = \frac{1}{2}\left(T_{kl} + T_{lk}\right), \tag{1.92}$$

$$T_{kl}^A = \frac{1}{2}\left(T_{kl} - T_{lk}\right). \tag{1.93}$$

Поскольку диагональные координаты антисимметричного тензора равны нулю имеем из (1.92)

$$T_{11}^S = T_{11}, \quad T_{22}^S = T_{22}, \quad T_{33}^S = T_{33},$$

а для недиагональных координат симметричной части тензора из (1.91) получаем полезные формулы

$$T_{kl}^S = T_{kl} - T_{kl}^A.$$

6. Единичный тензор и тензор Леви – Чивита

Используем определения (1.50) и (1.59) и полагаем, что система ортонормированных векторов $\mathbf{e}_k$ совпадает с системой базисных векторов $\mathbf{i}_k$, т. е.

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{i}_k.$$

Тогда получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \delta_{kl}. \tag{1.94}$$

$$^3\mathbf{L} = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \varepsilon_{skl}. \tag{1.95}$$

Так что координаты единичного тензора равны δ_{kl}, а координаты тензора Леви – Чивита — величинам ε_{skl}, которые теперь определяются из равенства

$$\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_s \varepsilon_{skl}. \tag{1.96}$$

Разумеется, формулы (1.57) для их определения сохраняют силу.

7. Умножение тензора на вектор

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Обращаемся в раздел 1.5 и рассматриваем все введенные произведения тензора на вектор

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{c}, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{T}, \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}\times\mathbf{c}, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{c}\times\mathbf{T}, \qquad {}^3\mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{c}, \qquad {}^3\mathbf{V} = \mathbf{c}\mathbf{T}.$$

Внося сюда разложения тензора $\mathbf{T}$ и вектора $\mathbf{c}$ по элементам соответствующих базисов, получим

$$\mathbf{d} = \left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right)\cdot\left(\mathbf{i}_m c_m\right) = \mathbf{i}_k \delta_{lm} T_{kl} c_m = \mathbf{i}_k T_{kl} c_l,$$

$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{i}_m c_m\right)\cdot\left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right) = \mathbf{i}_l \delta_{mk} c_m T_{kl} = \mathbf{i}_l c_k T_{kl},$$

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right)\times\left(\mathbf{i}_m c_m\right) = \mathbf{i}_k \left(\mathbf{i}_l\times\mathbf{i}_m\right) T_{kl} c_m = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_s \varepsilon_{slm} T_{kl} c_m,$$

$$\mathbf{M} = \left(\mathbf{i}_m c_m\right)\times\left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right) = \left(\mathbf{i}_m\times\mathbf{i}_k\right)\mathbf{i}_l c_m T_{kl} = \mathbf{i}_s\mathbf{i}_l \varepsilon_{smk} c_m T_{kl},$$

$${}^3\mathbf{Q} = \left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right)\left(\mathbf{i}_m c_m\right) = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m T_{kl} c_m,$$

$${}^3\mathbf{V} = \left(\mathbf{i}_m c_m\right)\left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right) = \mathbf{i}_m\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l c_m T_{kl}.$$

С помощью этих формул легко находим координаты всех объектов, получившихся в произведениях

$$d_k = T_{kl} c_l,$$

$$e_l = c_k T_{kl},$$

$$\Lambda_{ks} = \varepsilon_{slm} T_{kl} c_m,$$

$$M_{sl} = \varepsilon_{smk} c_m T_{kl},$$

$$Q_{kml} = T_{kl} c_m,$$

$$V_{mkl} = c_m T_{kl}.$$

Первые две формулы имеют аналоги в матричном исчислении: первая дает матрицу столбец произведения квадратной матрицы T_{kl} на матрицу столбец c_l; вторая — это матрица строка, равная произведению матрицы строки c_k на квадратную матрицу T_{kl}.

8. Умножение тензора на тензор

Обращаемся в раздел 1.5 и рассматриваем произведения — скалярное, векторное и, наконец, тензорное

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{P}, \qquad {}^3\mathbf{M} = \mathbf{T}\times\mathbf{P}, \qquad {}^4\mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{P}.$$

Подставляя сюда разложения тензоров по элементам базисов и выполняя предписанные формулами умножения операции, получаем

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}\right) = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_n \delta_{lm} T_{kl} P_{mn} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_n T_{kl} P_{ln},$$
$${}^3\mathbf{M} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \times \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}\right) = \mathbf{i}_k \left(\mathbf{i}_l \times \mathbf{i}_m\right) \mathbf{i}_n T_{kl} P_{mn} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_s \mathbf{i}_n \varepsilon_{slm} T_{kl} P_{mn},$$
$${}^4\mathbf{Q} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right)\left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}\right) = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n T_{kl} P_{mn}.$$

Координаты этих тензоров разных рангов таковы:

$$\Lambda_{kn} = T_{kl} P_{ln},$$
$$M_{ksn} = \varepsilon_{slm} T_{kl} P_{mn},$$
$$Q_{klmn} = T_{kl} P_{mn}.$$

Только первое из этих произведений имеет аналог в теории матриц: это произведение двух квадратных матриц T_{kl} и P_{ln}.

9. Двойные операции умножения двух тензоров

Опять-таки в разделе 1.5 находим необходимые формулы умножения

$$\lambda = \mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{P}, \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{T} \times\times \mathbf{P}, \qquad \mathbf{d} = \mathbf{T} \times\cdot \mathbf{P}, \qquad \mathbf{e} = \mathbf{T} \cdot\times \mathbf{P}.$$

Внося сюда разложения тензоров и выполняя предписанные умножения, получаем

$$\lambda = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}\right) = \delta_{lm} \delta_{kn} T_{kl} P_{mn} = T_{kl} P_{lk},$$
$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T} \times\times \mathbf{P} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \times\times \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}\right) =$$
$$= \left(\mathbf{i}_l \times \mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_n\right) T_{kl} P_{mn} = \mathbf{i}_s \mathbf{i}_r \varepsilon_{slm} \varepsilon_{rkn} T_{kl} P_{mn},$$
$$\mathbf{d} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \times\cdot \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}\right) = \left(\mathbf{i}_l \times \mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_n\right) T_{kl} P_{mn} =$$
$$= \mathbf{i}_s \varepsilon_{slm} \delta_{kn} T_{kl} P_{mn} = \mathbf{i}_s \varepsilon_{slm} T_{kl} P_{mk},$$
$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \cdot\times \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n P_{mn}\right) = \left(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_n\right) T_{kl} P_{mn} =$$
$$= \mathbf{i}_s \delta_{lm} \varepsilon_{skn} T_{kl} P_{mn} = \mathbf{i}_s \varepsilon_{skn} T_{kl} P_{ln}.$$

Легко находятся координаты полученных тензора и векторов, а также скаляр

$$\lambda = T_{kl} P_{lk},$$
$$\Lambda_{sr} = \varepsilon_{slm} \varepsilon_{rkn} T_{kl} P_{mn},$$
$$d_s = \varepsilon_{slm} T_{kl} P_{mk},$$
$$e_s = \varepsilon_{skn} T_{kl} P_{ln}.$$

Особого внимания заслуживает первая из этих формул. Если в ней положить $\mathbf{P} = \mathbf{T}^T$, то получим

$$\lambda = \mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{T}^T = T_{kl} T_{kl}. \tag{1.97}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

В правой части оказалась сумма квадратов всех координат тензора $\mathbf{T}$. Поэтому выражение (1.97) удобно использовать в конструкции нормы тензора $\mathbf{T}$

$$N(\mathbf{T}) = \sqrt{\mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{T}^T} = \sqrt{T_{kl}T_{kl}}\,. \tag{1.98}$$

10. Вектор, сопутствующий тензору второго ранга

Нам предстоит записать в координатной форме выражения (1.63), (1.64) и (1.66). Подставляя в них соответствующие разложения тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{E}$, получаем

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T_{kl}\right)\times\cdot\left(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_m\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{i}_l\times\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_m\right)T_{kl} = -\frac{1}{2}\mathbf{i}_s\varepsilon_{slm}T_{ml}\,,$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l T^A_{kl}\right)\times\cdot\left(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_m\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i}_s\varepsilon_{slm}T^A_{ml}\,,$$

$$\mathbf{T}^A = -\left(\mathbf{i}_m\omega_m\right)\times\left(\mathbf{i}_n\mathbf{i}_n\right) = -\mathbf{i}_s\mathbf{i}_n\varepsilon_{smn}\omega_m\,,$$

$$\mathbf{T}^A = -\left(\mathbf{i}_n\mathbf{i}_n\right)\times\left(\mathbf{i}_m\omega_m\right) = -\mathbf{i}_n\mathbf{i}_s\varepsilon_{snm}\omega_m\,.$$

Учитывая равенства (1.58), отсюда легко находим координаты

$$\omega_s = -\frac{1}{2}\varepsilon_{slm}T_{ml} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{slm}T^A_{ml}\,, \tag{1.99}$$

$$T^A_{ns} = -\varepsilon_{snm}\omega_m = -\varepsilon_{nms}\omega_m\,. \tag{1.100}$$

Итак, мы получили основные формулы координатного тензорного исчисления. Все они получены как прямое следствие простых и ясных формул прямого тензорного исчисления. Однако в координатном тензорном исчислении именно их принимают за исходные. Отгадать, что стоит за этими формулами в прямом тензорном исчислении, конечно, можно, но это нелегко: приходится пробираться через частокол маленьких индексов и в конце концов отгадывать возникающие при этом ребусы. Все это возможно! Но зачем? Применение прямого тензорного исчисления в качестве основного аппарата избавляет от этой тяжелой работы.

Только некоторые из этих ребусов отгадываются легко, например, сумма тензоров, скалярное произведение тензора на вектор и тензора на тензор. Легко понять введение нормы (1.98). Труднее обстоит дело с формулами для вектора, сопутствующего тензору второго ранга (1.99) или формулой (1.100) для вычисления тензора по заданному сопутствующему вектору.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

1.11. Координаты тензора в новом базисе

Рассматриваем два ортонормированных базиса: исходный $\mathbf{i}_k$ и штрихованный $\mathbf{i}'_m$. Всякий тензор второго ранга может быть представлен в виде разложений в каждом из базисов, а именно

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl} = \mathbf{i}'_k \mathbf{i}'_l T'_{kl}. \tag{1.101}$$

Координаты этих разложений легко выразить через тензор $\mathbf{T}$, используя следующие формулы

$$T_{mn} = \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}_n, \qquad T'_{mn} = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}'_n. \tag{1.102}$$

Допустим, что известны координаты тензора в одном базисе, скажем в исходном нештрихованном. Цель этого раздела — представить формулы для выражения координат этого же тензора, но уже в штрихованном базисе. Эта проблема решается очень просто: берем вторую формулу (1.102) и подставляем в нее разложение тензора по первой формуле (1.101). Получаем координаты тензора в новом, т. е. штрихованном базисе

$$T'_{mn} = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}'_n = \mathbf{i}'_m \cdot \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \cdot \mathbf{i}'_n = \left(\mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{i}'_n\right) T_{kl}. \tag{1.103}$$

Значения входящих в это выражение скалярных произведений ортов штрихованного базиса на орты нештрихованного должны быть заданы, ибо именно они характеризуют расположение ортов штрихованного базиса по отношению к ортам нештрихованного. Обозначая эти скалярные произведения следующим образом

$$\alpha_{mk} = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}'_m, \tag{1.104}$$

приведем выражение (1.103) к следующему виду

$$T'_{mn} = \alpha_{mk} \alpha_{nl} T_{kl}. \tag{1.105}$$

В координатном тензорном исчислении уравнение (1.105) принимается за определение тензора второго ранга: это матрица, которая при переходе от одного координатного базиса к другому преобразуется по закону (1.105).

Итак, если оставаться в одном базисе, то всякому тензору второго ранга соответствует единственная матрица его координат, но если базис будет изменяться, то будет изменяться и соответствующая ему матрица.

Таким образом, одному тензору соответствует бесконечное число матриц — по одной в каждом базисе.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Найдем, например, координаты единичного тензора в штрихованном базисе. По формуле (1.102) находим

$$E'_{mn} = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}'_n.$$

Проводя последовательное умножение, получим

$$E'_{mn} = \mathbf{i}'_m \cdot \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{i}'_n\right) = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}'_n = \delta_{mn}. \tag{1.106}$$

Но ведь в исходном базисе координаты единичного тензора были такими же, т. е. δ_{kl}. Таким образом, единичный тензор имеет одинаковые координаты в любой ортогональной системе. Это изотропный тензор. Создается впечатление, что и в пространстве тензоров третьего ранга тоже есть один изотропный тензор — тензор Леви – Чивита: ведь его координаты определены формулами (1.57) в любой правой ортогональной системе базисных ортов. Это действительно будет так, если исходный и новый базис оба являются правыми. А вот если старый базис остается правым, а новый — будет левым, то тогда соответствующие координаты тензора Леви – Чивита в новом базисе будут иметь другой знак. Значит, они изменятся при преобразовании базиса из правого в левый. А что это за преобразование базиса, при котором правая система переходит в левую? Одно такое преобразование фактически встречалось ранее в разделе 1.7 — это преобразование инверсии. Другой пример — отражение одного из базисных векторов при сохранении двух других.

1.12. Обратный тензор

Обратным называется такой тензор $\mathbf{T}^{-1}$, матрица координат которого обратна матрице координат исходного.

Используем разложения

$$\mathbf{T} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}, \tag{1.107}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T^*_{kl}. \tag{1.108}$$

Из алгебры матриц известно, что матрица T^*_{kl}, обратная T_{kl}, равна

$$T^*_{kl} = \frac{A_{lk}}{|T|},$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

где A_{lk} алгебраическое дополнение элемента T_{lk} матрицы T, а $\left|T\right|$ — определитель матрицы T. Полагаем $\left|T\right| \neq 0$. Известно, что обратная матрица удовлетворяет соотношениям

$$T_{kl}^{*} T_{ln} = \delta_{kn}, \tag{1.109}$$

$$T_{kl} T_{ln}^{*} = \delta_{kn}. \tag{1.110}$$

Составим произведение $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ и $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}$. Подставляя в них разложения (1.107) и (1.108) получим, соответственно

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n T_{mn}^{*}\right) = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_n T_{kl} T_{ln}^{*},$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \left(\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl}^{*}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n T_{mn}\right) = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_n T_{kl}^{*} T_{ln}.$$

В силу соотношений (1.109) и (1.110) в обоих случаях получаем $\mathbf{E}$.

Таким образом, установлены свойства обратного тензора

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}. \tag{1.111}$$

Обратный тензор широко применяется к решению векторных уравнений.

Пусть, например, имеем уравнения

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}. \tag{1.112}$$

Требуется найти $\mathbf{a}$. Если $\left|T\right| \neq 0$, то результат вычисления $\mathbf{a}$ таков

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \tag{1.113}$$

Теорема 1.3. Обратный тензор скалярного произведения двух тензоров равен произведению тензоров обратных сомножителям, взятому в обратном порядке, т. е.

$$\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}\right)^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1}. \tag{1.114}$$

Доказательство равенства (1.114) получается прямой проверкой. Действительно, имеем цепочку равенств

$$\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}\right) \cdot \left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}\right)^{-1} = \left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{P}\right) \cdot \left(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1}\right) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} =$$

$$= \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Конечно, мы предполагаем, что оба тензора неособенные, т. е. $\left|\mathbf{T}\right| \neq 0$, $\left|\mathbf{P}\right| \neq 0$.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

1.13. Главный базис симметричного тензора второго ранга

Пусть дан симметричный тензор второго ранга $\mathbf{T}$. Ищем такой единичный вектор $\mathbf{e}$, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e} = t\mathbf{e}. \qquad (1.115)$$

Равенство (1.115) требует, чтобы вектор, равный $\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}$ был бы параллелен $\mathbf{e}$. Если такое направление существует, то оно называется главным направлением тензора $\mathbf{T}$, а соответствующее значение t — главным значением.

Перепишем уравнение (1.115) в следующей форме

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e} = t\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}.$$

Перенося произведение, стоящее в правой части, в левую, получим следующее однородное векторное уравнение

$$(\mathbf{T} - \mathbf{E}t)\cdot\mathbf{e} = 0.$$

В координатной форме оно имеет вид

$$\left(T_{kl} - \delta_{kl}t\right)\cdot e_l = 0, \qquad (1.116)$$

где e_l — координаты единичного вектора $\mathbf{e}$.

Получилась система трех однородных уравнений с тремя неизвестными — координатами вектора $\mathbf{e}$. Такая система имеет нулевое решение.

Этот результат не дает решения проблемы: получается нулевой вектор и он действительно удовлетворяет исходному уравнению (1.115). Но мы то ищем единичный вектор! Значит не все его координаты могут быть равны нулю. Когда же такой вектор можно найти из системы (1.116)? Ответ известен: только тогда, когда определитель ее равен нулю, т. е.

$$\left|T_{kl} - \delta_{kl}t\right| = 0. \qquad (1.117)$$

В развернутом виде это уравнение третьей степени относительно неизвестной t. Его запишем так

$$-t^3 + \mathrm{I}_1 t^2 - \mathrm{I}_2 t + \mathrm{I}_3 = 0. \qquad (1.118)$$

Ниже мы остановимся на вопросе о том, как рационально вычислить коэффициенты этого уравнения, которые мы обозначили I_1, I_2 и I_3. Уравнение (1.117) или (1.118) называют характеристическим уравнением матрицы координат тензора $\mathbf{T}$ или просто характеристическим уравнением тензора $\mathbf{T}$. Как всякое уравнение третьей степени, оно имеет три корня t_1,

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

t_2 и t_3. Это главные значения тензора $\mathbf{T}$. Им соответствует три главных направления $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$. Они определяются из уравнений (1.116).

Справедливы следующие теоремы о главных значениях и главных направлениях симметричного тензора.

Теорема 1.4. Главные значения симметричного тензора вещественны.

Теорема 1.5. Главные направления симметричного тензора ортогональны.

Эти знаменитые теоремы хорошо известны в теории матриц и поэтому в специальном новом доказательстве не нуждаются. Однако, ниже мы приведем такое доказательство, используя тензорно-векторный аппарат. Оно будет представлено ниже. А сейчас воспользуемся плодами этих теорем.

Первое, что следует сделать, это найти разложение тензора в главном базисе. Чтобы это сделать используем главные направления $\mathbf{e}_{(k)}$ в качестве векторного базиса и, соответственно, диады $\mathbf{e}_{(k)}\mathbf{e}_{(l)}$ в качестве тензорного. Записываем разложение тензора $\mathbf{T}$ в этом базисе, который называем главным

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_{(k)}\mathbf{e}_{(l)}\tilde{T}_{kl}.$$

Его можно записать и так

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}_l\mathbf{e}_{(l)}, \tag{1.119}$$

где

$$\tilde{\mathbf{T}}_l = \mathbf{e}_{(k)}\tilde{T}_{kl}.$$

Теперь запишем уравнение (1.115) для главного направления $\mathbf{e}_{(n)}$. Оно имеет вид

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(n)} = t_n\mathbf{e}_{(n)}, \qquad \left(\cancel{\sum_n}\right). \tag{1.120}$$

Здесь справа появилось выражение, в котором индекс n встречается дважды, и, тем не менее, в соответствии со здравым смыслом, заложенным в (1.115), суммирование по этому индексу не должно проводиться. Чтобы это как-то выразить, справа от равенства указан знак суммы по n с косой чертой, который означает: по n не суммировать. Однако, продолжим наше рассуждение и подставим в уравнение (1.120) разложение (1.119). Получим следующее уравнение

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\tilde{\mathbf{T}}_l \mathbf{e}_{(l)} \cdot \mathbf{e}_{(n)} = \tilde{\mathbf{T}}_n = t_n \mathbf{e}_{(n)}, \qquad \left(\not\sum_n \right). \tag{1.121}$$

Подставляя это представление в (1.119), придем к искомому разложению

$$\mathbf{T} = t_n \mathbf{e}_{(n)} \mathbf{e}_{(n)}, \qquad \left(\sum_n \right). \tag{1.122}$$

Теперь справа появилось выражение, в котором индекс n повторяется трижды. Нужно ли суммировать по этому индексу? В выражении (1.121) суммирование не ведется. Но ведь оно подставлено в разложение (1.119), в котором суммирование проводится. Так что суммировать по n в (1.122) нужно! Это указано знаком суммы по n справа от самой суммы. Запишем эту сумму подробно:

$$\mathbf{T} = t_n \mathbf{e}_{(n)} \mathbf{e}_{(n)} = t_1 \mathbf{e}_{(1)} \mathbf{e}_{(1)} + t_2 \mathbf{e}_{(2)} \mathbf{e}_{(2)} + t_3 \mathbf{e}_{(3)} \mathbf{e}_{(3)}. \tag{1.123}$$

Ее можно записать еще так:

$$\mathbf{T} = t_n \delta_{nl} \mathbf{e}_{(n)} \mathbf{e}_{(l)}, \qquad \left(\sum_n \right).$$

Отсюда видно, что матрица координат тензора $\mathbf{T}$ в главном базисе имеет вид

$$\tilde{T}_{nl} = t_n \delta_{nl}, \qquad \left(\not\sum_k \right)$$

или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{bmatrix}.$$

Она оказалась диагональной: главные значения t_1, t_2, t_3 стоят только на главной диагонали. Остальные элементы матрицы равны нулю!

Рассмотрим степени тензора. Под степенью n тензора понимаем скалярное произведение n тензоров, т. е.

$$\mathbf{T}^n = \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdots \mathbf{T}}_{n \text{ штук}}. \tag{1.124}$$

Вычислим сначала вторую степень тензора. Имеем

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = \left(t_1\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + t_2\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + t_3\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}\right)\cdot\left(t_1\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + t_2\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + t_3\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}\right).$$

Перемножая последние два выражения почленно и учитывая ортонормированность главного базиса

$$\mathbf{e}_{(k)}\cdot\mathbf{e}_{(l)} = \delta_{kl}.$$

Получаем

$$\mathbf{T}^2 = t_1^2\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + t_2^2\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + t_3^2\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \qquad (1.125)$$

Продолжая процесс умножения, придем к выражениям третьей и далее степеней

$$\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = t_1^3\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + t_2^3\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + t_3^3\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}, \qquad (1.126)$$

$$\mathbf{T}^n = t_1^n\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + t_2^n\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + t_3^n\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \qquad (1.127)$$

Теорема 1.6. (*Кели – Гамильтона).* Всякий симметричный тензор второго ранга тождественно удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$-\mathbf{T}^3 + \mathrm{I}_1\,\mathbf{T}^2 - \mathrm{I}_2\,\mathbf{T}^3 + \mathrm{I}_3\,\mathbf{T}^0 = 0. \qquad (1.128)$$

Здесь появилась нулевая степень тензора. Под нулевой степенью понимаем выражение (1.127) при $n = 0,$ т. е.

$$\mathbf{T}^0 = t_1^0\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + t_2^0\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + t_3^0\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}.$$

Но ведь нулевые степени чисел равны единицам. Так что имеем

$$\mathbf{T}^0 = \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)} = \mathbf{E}. \qquad (1.129)$$

Чтобы убедиться в выполнении (1.128), подставим в его левую часть степени (1.126), (1.125), (1.123) и, наконец, (1.129). Объединяя коэффициенты, стоящие при базисных диадах, получим

$$\begin{aligned}
&-T^3 + \mathrm{I}_1 T^2 - \mathrm{I}_2 T + \mathrm{I}_3 T^0 = \\
&= \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)}(-t_1^3 + \mathrm{I}_1 t_1^2 - \mathrm{I}_2 t_1 + \mathrm{I}_3) + \\
&+\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)}(-t_2^3 + \mathrm{I}_1 t_2^2 - \mathrm{I}_2 t_2 + \mathrm{I}_3) + \\
&+\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}(-t_3^3 + \mathrm{I}_1 t_3^2 - \mathrm{I}_2 t_3 + \mathrm{I}_3) = 0.
\end{aligned} \qquad (1.130)$$

Мы записали справа тензорный ноль, потому что слева в скобках стоят левые части характеристического уравнения, записанные для первого, второго и третьего главных значений, которые, конечно же, равны нулю.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

1.14. Инварианты симметричного тензора и его главные инварианты

Главные значения симметричного тензора являются его важными объективными характеристиками. Но ведь сам тензор может быть задан в различных базисах. Создается первое впечатление о том, что его главные значения могут зависеть от того в каком базисе задан тензор. Однако здравый смысл подсказывает, что это не так: они не зависят от базиса, в котором задан тензор. Такие величины называются инвариантными. Таким образом, мы пришли к заключению о том, что главные значения t_1, t_2, t_3 являются инвариантами тензора. Но ведь если это так, то инвариантами являются и коэффициенты I_1, I_2 и I_3 характеристического уравнения (1.118), из которого они находятся. Величины I_1, I_2 и I_3 называются главными инвариантами.

Обратимся теперь к главным направлениям. Это тоже важные объективные характеристики тензора. Следовательно, $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$, как объекты, определяющие главные направления тензора, тоже являются инвариантными векторами или просто инвариантами. А вот их координаты такими инвариантами не являются.

Вернемся к главным инвариантам. Откуда их найти? Очевидно, что следует приравнять друг другу левые части уравнений (1.117) и (1.118). Это дает тождество

$$\left|T_{kl} - \delta_{kl} t\right| = -t^3 + \mathrm{I}_1 t^2 - \mathrm{I}_2 t + \mathrm{I}_3 . \qquad (1.131)$$

В развернутом виде это тождество имеет вид

$$\begin{vmatrix} T_{11} - t & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - t & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - t \end{vmatrix} = -t^3 + \mathrm{I}_1 t^2 - \mathrm{I}_2 t + \mathrm{I}_3 . \qquad (1.132)$$

Раскрывая определитель, стоящий в левой части, получаем возможность вычислить главные инварианты. Такой путь в идейном плане прост, но громоздок. Однако существует другой, более простой путь. Так, если положить в (1.132) $t = 0$, то сразу получим третий инвариант I_3

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.133}$$

Далее, столь же легко вычислить I_1. Обратим внимание на то, что это коэффициент при t^2 в правой части. Но ведь члены с t^2 в левой части появятся только при перемножении элементов главной диагонали. Так что будем иметь

$$-t^3 + (T_{11} + T_{22} + T_{33})t^2 + ... = -t^3 + \mathrm{I}_1\, t^2 + ...$$

Невыписанные слагаемые членов с t^2 не содержат. Таким образом, получаем

$$\mathrm{I}_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \tag{1.134}$$

Чтобы ловко вычислить второй главный инвариант I_2 запишем определитель, стоящий в левой части в слегка измененной форме

$$\begin{vmatrix} T_{11} - t' & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - t'' & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - t''' \end{vmatrix} = \mathrm{I}_3 - At' - Bt'' - Ct''' - ... \tag{1.135}$$

В правой части этого тождества сохранены только члены нулевого и первого порядка по отношению к t', t'' и t'''. Если теперь положить $t' = t'' = t'''$ в (1.135), то определитель в левой части превратится в определитель тождества (1.132), а правая часть примет вид $\mathrm{I}_3 - (A + B + C)t + ...$ Но она должна совпасть с правой частью (1.132). Так что получаем

$$\mathrm{I}_3 - (A + B + C)t + ... = -t^3 + \mathrm{I}_1\, t^2 - \mathrm{I}_2\, t + \mathrm{I}_3\,.$$

Сравнивая коэффициенты при t в правой и левой частях, находим представление второго инварианта

$$\mathrm{I}_2 = A + B + C. \tag{1.136}$$

Чтобы найти коэффициент A при t', положим в тождестве (1.135) $t'' = 0$ и $t''' = 0$. Тогда получим

$$\begin{vmatrix} T_{11} - t' & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \mathrm{I}_3 - At'. \tag{1.137}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Раскрывая определитель, стоящий слева, по элементам первой строки и удерживая только линейные члены по отношению к t', найдем

$$A = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.138}$$

По аналогии получим B и C

$$B = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.139}$$

Подстановка найденных значений A, B и C в (1.136) дает следующий окончательный результат

$$\mathrm{I}_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.140}$$

Если бы мы проводили вычисления в главном базисе, то мы бы получили

$$\mathrm{I}_3 = t_1 t_2 t_3, \qquad \mathrm{I}_1 = t_1 + t_2 + t_3, \tag{1.141}$$

$$\mathrm{I}_2 = t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2. \tag{1.142}$$

Последние формулы позволяют получить представления главных инвариантов I_1 и I_2 в виде некоторых алгебраических операций непосредственно над тензором $\mathbf{T}$. Имеем из (1.141) следующее представление первого главного инварианта

$$\mathrm{I}_1 = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{T}. \tag{1.143}$$

Далее составляем комбинацию

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1^2 - 2\,\mathrm{I}_2 &= \left(t_1 + t_2 + t_3\right)^2 - 2t_2t_3 - 2t_1t_3 - 2t_1t_2 = \\ &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + 2t_1t_2 + 2t_1t_3 + 2t_2t_3 - 2t_2t_3 - 2t_1t_3 - 2t_1t_2 = \\ &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = \mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Таким образом, последнее равенство приводит к следующему представлению второго главного инварианта

$$\mathrm{I}_2 = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{T} \cdot\cdot\, \mathbf{T} - \mathrm{I}_1^2\right). \tag{1.144}$$

Представление третьего инварианта оставляем в форме (1.133) в силу его простоты.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

1.15. Доказательство теорем о главных направлениях и главных значениях симметричного тензора

В предыдущих параграфах было убедительно продемонстрировано, что применение технологии, основанной на использовании главных направлений и главных значений симметричных тензоров предоставляет существенные преимущества при работе с тензорами. Эти преимущества основаны на использовании упомянутых выше теорем.

Теорема 1.4. Главные значения симметричного тензора вещественны.

Теорема 1.5. Главные направления симметричного тензора ортогональны.

Ниже приводится доказательство этих фундаментальных теорем, выполненное на языке прямого тензорного исчисления. Напоминаем, что главные значения являются корнями характеристического уравнения (1.118). Это уравнение кубическое. Поэтому у него три корня: t_1, t_2 и t_3. Каждому корню соответствует главное направление. Их три: $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$. Они определяются уравнениями (1.115)

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(1)} = t_1\mathbf{e}_{(1)}, \quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(2)} = t_2\mathbf{e}_{(2)}, \quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(3)} = t_3\mathbf{e}_{(3)}.$$

Составим одно важное равенство. Возьмем какие-нибудь два из этих уравнений, например, первое и второе

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(1)} = t_1\mathbf{e}_{(1)}, \qquad \mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(2)} = t_2\mathbf{e}_{(2)}. \tag{1.145}$$

Умножим обе части первого уравнения на $\mathbf{e}_{(2)}$, а второго на $\mathbf{e}_{(1)}$ и вычтем второй результат из первого. Тогда получим

$$\mathbf{e}_{(2)}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(1)} - \mathbf{e}_{(1)}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_{(2)} = t_1\mathbf{e}_{(2)}\cdot\mathbf{e}_{(1)} - t_2\mathbf{e}_{(1)}\cdot\mathbf{e}_{(2)}.$$

С помощью равенства (1.36) оно может быть преобразовано к следующему виду:

$$\mathbf{e}_{(2)}\cdot\left(\mathbf{T}-\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\right)\cdot\mathbf{e}_{(1)} = \left(t_1 - t_2\right)\mathbf{e}_{(1)}\cdot\mathbf{e}_{(2)}.$$

Поскольку мы ограничились случаем симметричного тензора $\mathbf{T}$, левая часть обращается в нуль и это дает

$$\left(t_1 - t_2\right)\mathbf{e}_{(1)}\cdot\mathbf{e}_{(2)} = 0. \tag{1.146}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Докажем первую терему, и сделаем это методом от противного. В соответствии с этим методом допускаем, что теорема ошибочна и тогда характеристическое уравнение (1.118) имеет комплексный корень

$$t_1 = a + ib, \qquad b \neq 0. \tag{1.147}$$

А поскольку коэффициенты уравнения (1.118) вещественны, то оно имеет и второй комплексный корень, а именно, комплексно сопряженный

$$t_2 = a - ib.$$

Запишем уравнения (1.145) для этих корней

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = \left(a + ib\right)\mathbf{e}_{(1)}, \qquad \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = \left(a - ib\right)\mathbf{e}_{(2)}. \tag{1.148}$$

Конечно, решением этих уравнений являются векторы, имеющие комплексные координаты, так что

$$\mathbf{e}_{(1)} = \boldsymbol{\alpha} + i\,\boldsymbol{\beta}.$$

Найдем связь между $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$. Для этого возьмем комплексно сопряженные величины от левой и правой частей первого уравнения (1.148). Получим

$$\mathbf{T} \cdot \overline{\mathbf{e}}_{(1)} = (a - ib)\overline{\mathbf{e}}_{(1)}.$$

Замечаем, что это уравнение совпадает со вторым уравнением (1.148). Так что одним из его решений может быть и такое

$$\mathbf{e}_{(2)} = \overline{\mathbf{e}}_{(1)} = \boldsymbol{\alpha} - i\,\boldsymbol{\beta}.$$

Тогда тождество (1.146) примет следующий вид

$$2ib\left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}\right) = 0.$$

Заметим теперь, что выражение в скобке всегда положительно. Значит, имеем

$$b = 0.$$

Итак, мы пришли к противоречию: мы предположили, что $b \neq 0$ по (1.147), а оказалось, что оно равно нулю. Следовательно, наше предположение о наличии комплексных корней у уравнения (1.118) ошибочно.

Обратимся к доказательству ортогональности главных направлений. Для этого снова вернемся к тождеству (1.146). Положим сначала, что все главные значения тензора t_1 и t_2 различны, т. е. $t_1 \neq t_2$.

Тогда из (1.146) следует

$$\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = 0. \tag{1.149}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Это означает, что направления $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$ ортогональны.

Рассмотрим теперь пару главных значений t_1 и t_3 и соответствующую пару главных направлений $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$. По аналогии с тем, как это сделано выше, можем составить уравнение, подобное (1.146)

$$\left(t_1 - t_3\right)\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = 0.$$

И если $t_1 \neq t_3$, то получаем условие ортогональности векторов $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$:

$$\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = 0.$$

Таким же образом доказываем и ортогональность векторов $\mathbf{e}_{(2)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$.

Итак, мы установили факт ортогональности главных направлений

$$\mathbf{e}_{(k)} \cdot \mathbf{e}_{(l)} = \delta_{kl} \tag{1.150}$$

при условии когда главные значения различны, т. е.

$$t_1 \neq t_2, \qquad t_1 \neq t_3, \qquad t_2 \neq t_3.$$

Допустим теперь, что среди главных значений имеются кратные. Говоря точнее, рассмотрим сначала случай двукратных корней характеристического уравнения (1.118), а именно положим, что $t_1 = t_2$, $t_1 \neq t_3$, $t_2 \neq t_3$. По сказанному выше имеем

$$\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = 0, \qquad \mathbf{e}_{(2)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = 0, \tag{1.151}$$

т. е. направления $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$ ортогональны третьему главному направлению. Однако использованная выше процедура рассуждений не позволяет получить условие ортогональности векторов $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$. Действительно, тождество (1.146) принимает вид:

$$0\ \mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = 0.$$

Откуда следует, что $\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} \neq 0$, т. е. возможно, что направления $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$ не ортогональны.

Обратим теперь внимание на то, что в силу тождества (1.151) векторы $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$ просто ортогональны вектору $\mathbf{e}_{(3)}$. Никакими другими достоинствами они не обладают. Но ведь таких векторов, ортогональных вектору $\mathbf{e}_{(3)}$, бесконечно много! Эта ситуация позволяет нам проявить свою волю. Мы можем выбрать любую пару ортогональных между собой векторов из

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

этого множества и назначить эти выбранные векторы быть главными направлениями. В сочетании с условиями (1.151) все три вектора окажутся ортогональными. Но ведь это как раз то, что утверждает теорема 1.5. По своей воле мы сделали так, что теорема 1.5 имеет место и в случае двукратных корней.

Возможна и другая мотивировка.

Рассмотрим этот случай по другому, а именно, обратимся к уравнениям (1.145), в которых $t_1 = t_2$. Получим

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = t_1 \mathbf{e}_{(1)}, \qquad \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = t_1 \mathbf{e}_{(2)}.$$

Уравнения относительно $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$ оказались одинаковыми. Но это не означает, что $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$ равны. Случайно может оказаться, что они ортогональны, и тогда все в порядке. Но типичным случаем является случай, когда они не ортогональны, т. е. $\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} \neq 0$.

Составим линейную комбинацию этих векторов

$$\mathbf{e}^*_{(2)} = \beta\left(\mathbf{e}_{(2)} + \alpha \mathbf{e}_{(1)}\right), \tag{1.152}$$

где α и β — пока неизвестные постоянные.

Составим произведение $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^*_{(2)}$. Получим следующее выражение

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^*_{(2)} = \beta\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{(2)} + \alpha \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{(1)}\right).$$

Воспользовавшись уравнениями (1.145) преобразуем последнее уравнение к следующему виду

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^*_{(2)} = \beta\left(t_1 \mathbf{e}_{(2)} + \alpha t_1 \mathbf{e}_{(1)}\right) = t_1 \beta\left(\mathbf{e}_{(2)} + \alpha \mathbf{e}_{(1)}\right).$$

В правой части усматриваем вектор (1.152), так что последнее уравнение принимает вид

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^*_{(2)} = t_1 \mathbf{e}^*_{(2)}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{e}^*_{(2)}$ удовлетворяет уравнению для определения главных направлений. Это значит, что $\mathbf{e}^*_{(2)}$ тоже является главным направлением.

Рассмотрим теперь пару векторов $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}^*_{(2)}$. Подберем параметр α из условия их ортогональности

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}^*_{(2)} = 0.$$

Подставив сюда $\mathbf{e}^*_2$ по (1.152) получим уравнение

$$\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}^*_{(2)} = \mathbf{e}_{(1)} \cdot \beta\left(\mathbf{e}_{(2)} + \alpha\mathbf{e}_{(1)}\right) = 0$$

или

$$\beta\left(\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} + \alpha\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(1)}\right) = 0.$$

Условимся, что $\mathbf{e}_{(1)}$ является единичным. Тогда найдем

$$\alpha = -\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)}.$$

Постоянную β найдем из условия нормировки вектора $\mathbf{e}^*_{(2)}$ на единицу. Принимаем решение назначить ортогональные векторы $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}^*_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ в качестве главных направлений. Важным для всех приведенных выше рассуждений является представление (1.122) или (1.123) тензора. В рассмотренном случае оно имеет вид

$$\mathbf{T} = t_1\left(\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}^*_{(2)}\mathbf{e}^*_{(2)}\right) + t_3\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \qquad (1.153)$$

Аналогичным образом доказывается ортогональность и нормированность главного базиса тензора в случае трехкратного корня характеристического уравнения $t_1 = t_2 = t_3$. Тогда представление тензора в главном базисе принимает вид

$$\mathbf{T} = t_1\left(\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}^*_{(2)}\mathbf{e}^*_{(2)} + \mathbf{e}^*_{(3)}\mathbf{e}^*_{(3)}\right) = t_1\mathbf{E}. \qquad (1.154)$$

Таким образом, и при разных корнях характеристического уравнения и при кратных главные направления ортонормированны, причем в первом случае они получаются, а во втором специально конструируются, а представление тензора в главном базисе имеет единый вид (1.122) или (1.123).

Возможна и другая мотивировка. Как и при рассмотрении случая двукратных корней, запишем условия типа (1.146) для всех комбинаций равных главных значений для случая, когда $t_1 = t_2 = t_3$. Получим

$$0\mathbf{e}_{(1)} \cdot \mathbf{e}_{(2)} = 0, \qquad 0\mathbf{e}_{(2)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} = 0, \qquad 0\mathbf{e}_{(3)} \cdot \mathbf{e}_{(1)} = 0. \qquad (1.155)$$

Отсюда видно, что все они выполняются и векторы $\mathbf{e}_{(1)}$ и $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$ не обязаны быть ортогональными. Это просто произвольные векторы. Но ведь таких произвольных векторов бесконечно много. Как и в случае дву-

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

кратных корней представляется возможность проявить свою волю. А именно, выберем из бесконечного множества просто произвольную комбинацию ортогональных и нормированных векторов и назначим эту комбинацию быть главными направлениями. Тогда оказывается, что

$$\mathbf{T} = t_1\left(\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}\right) = t_1\mathbf{E}. \qquad (1.156)$$

Замечаем, что уравнение (1.156) совпадает с (1.154).

Таким образом, и в случае трехкратного корня характеристического уравнения мы сами делаем так, что теорема 1.5 выполняется!

1.16. Ортогональный тензор, тензор поворота, тензоры отражений

Снова рассматриваем ситуацию, в которой фигурирует два базиса: старый — $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ — и новый — $\mathbf{i}'_1$, $\mathbf{i}'_2$ и $\mathbf{i}'_3$. Как и в 1.11 полагаем, что оба базиса ортонормированны, т. е. имеем соотношения

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl}, \quad \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}'_n = \delta_{mn}.$$

Полагаем, как и в разделе 1.11, что известны косинусы углов между старыми и новыми ортами

$$\cos(\mathbf{i}'_m, \mathbf{i}_n) = \alpha_{mn},$$

причем

$$\alpha_{mn} = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}_n.$$

Вводим тензор $\mathbf{A}$ следующей формулой

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}'_k \mathbf{i}_k. \qquad (1.157)$$

Его называем ортогональным тензором. Это сумма трех диад. С помощью введенного тензора $\mathbf{A}$ легко находим формулы, связывающие старый и новый базисы

$$\mathbf{i}'_m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_m. \qquad (1.158)$$

Как и в разделе 1.11 находим координаты тензора $\mathbf{A}$ в старом и новом базисах

$$A_{mn} = \mathbf{i}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_n, \qquad A_{mn} = \mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}'_n.$$

Подставляя сюда представления тензора по (1.157), получим значения координат в обоих базисах

$$A_{mn} = \left(\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}'_k\right)\left(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_n\right) = \left(\mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{i}_m\right)\delta_{kn} = \alpha_{km}\delta_{kn} = \alpha_{nm},$$

$$A'_{mn} = \left(\mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}'_k\right)\left(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}'_n\right) = \delta_{mk}\left(\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{i}_k\right) = \delta_{mk}\alpha_{nk} = \alpha_{nm}.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Отмечаем факт: координаты тензора $\mathbf{A}$ в старом и новом базисах равны друг другу!

Таким образом, представления ортогонального тензора $\mathbf{A}$ в старом и новом базисах имеют следующий вид

$$\mathbf{A} = \alpha_{nm}\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n = \alpha_{nm}\mathbf{i}'_m\mathbf{i}'_n. \quad (1.159)$$

Образуем произведение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \left(\mathbf{i}'_k\mathbf{i}_k\right) \cdot \left(\mathbf{i}_l\mathbf{i}'_l\right).$$

Проводя предписанные этой формулой вычисления, получим

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{i}'_k\mathbf{i}'_k = \mathbf{E}.$$

Аналогично находим

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_k = \mathbf{E}.$$

Таким образом, имеем следующие соотношения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (1.160)$$

Но ведь по формуле (1.111), справедливой для всякого тензора, в том числе и для $\mathbf{A}$ имеем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (1.161)$$

Сравнивая равенства (1.161) и (1.160) устанавливаем, что обратный тензор от ортогонального тензора равен его транспонированному

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T. \quad (1.162)$$

Если записать (1.160) в координатной форме, то получим в силу (1.159) следующие равенства

$$\left|\alpha_{nm}\alpha_{mn}\right| = 1$$

или

$$\left|\alpha_{nm}\right|\left|\alpha_{mn}\right| = 1.$$

Но ведь определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы, т. е.

$$\left|\alpha_{mn}\right| = \left|\alpha_{nm}\right|$$

и тогда получаем

$$\left|\alpha_{nm}\right|^2 = 1.$$

Отсюда находим

$$\left|\alpha_{nm}\right| = \left|\mathbf{A}\right| = \pm 1. \quad (1.163)$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Возникает трудный вопрос: какой знак выбрать здесь. Оказывается, что бывает и так и этак. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Допустим, что новый базис $\mathbf{i}'$ получается из старого $\mathbf{i}$ путем поворота. Соответствующий тензор $\mathbf{A}$ называем тензором поворота. Когда базисы совмещены $(\mathbf{i}' = \mathbf{i})$, тензор поворота $\mathbf{A}$ равен единичному тензору $\mathbf{E}$, а его определитель равен $+1$. Это же значение имеет определитель при любом повороте, ибо он является непрерывной функцией углов поворота, например, эйлеровых углов поворота. Таким образом, определитель тензора поворота всегда имеет следующее значение

$$|\mathbf{A}| = +1. \tag{1.164}$$

Рассмотрим теперь отражение. Пусть, например, $\mathbf{i}'_1 = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}'_2 = \mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}'_3 = -\mathbf{i}_3$. В этом случае тензор $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}'_k \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3.$$

Это тензор отражения в плоскости $x_1 o x_2$.

Приводим еще два тензора отражения, соответственно, в плоскостях $x_1 o x_3$ и $x_2 o x_3$

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3,$$
$$\mathbf{A} = -\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3.$$

Легко увидеть, что определитель любого из этих трех тензоров отражений равен -1, т. е.

$$|\mathbf{A}| = -1. \tag{1.165}$$

Допустим теперь, что преобразование от старого базиса $\mathbf{i}$ к новому $\mathbf{i}'$ осуществляется в два приема: сначала поворот, а затем отражение или наоборот. Тогда тензор $\mathbf{A}$ будет иметь представление

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{R}$$

или

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{0},$$

где $\mathbf{R}$ — тензор поворота, а $\mathbf{0}$ — тензор отражения.

Легко вычислить значение определителей этих ортогональных тензоров

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{0}||\mathbf{R}| = -1$$

или

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{R}||\mathbf{0}| = -1.$$

Рассмотрим теперь произведения ортогональных тензоров на векторы и тензоры. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ в старом базисе имеет представления

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_s a_s. \tag{1.166}$$

Составим произведение

$$\mathbf{a}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}. \tag{1.167}$$

Используя представление $\boldsymbol{A}$ по (1.157), получим

$$\mathbf{a}' = \left(\mathbf{i}'_k \mathbf{i}_k\right) \cdot \left(\mathbf{i}_s a_s\right) = \mathbf{i}'_k a_k.$$

Оказалось, что $\mathbf{a}'$ представляет собой вектор, у которого координаты в новом базисе имеют те же значения, что и в старом. Если ортогональный тензор является тензором поворота, то $\mathbf{a}'$ называют повернутым вектором $\mathbf{a}$. Рассмотрим теперь следующее произведение

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{A}^T. \tag{1.168}$$

Тензор $\boldsymbol{\Lambda}$ представим в старом базисе

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \Lambda_{mn}. \tag{1.169}$$

Используя представление $\mathbf{A}$ по (1.157), получим

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \left(\mathbf{i}'_s \mathbf{i}_s\right) \cdot \left(\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \Lambda_{mn}\right) \cdot \left(\mathbf{i}'_r \mathbf{i}_r\right)^T = \mathbf{i}'_s \mathbf{i}'_r \Lambda_{sr}. \tag{1.170}$$

Сравнивая (1.169) и (1.170), находим, что тензор $\boldsymbol{\Lambda}'$ имеет в новом базисе те же координаты, что и тензор $\boldsymbol{\Lambda}$ в старом базисе. В том случае, когда ортогональный тензор $\mathbf{A}$ представляет собой тензор поворота, то тензор $\boldsymbol{\Lambda}'$ называют повернутым тензором $\boldsymbol{\Lambda}$.

Аналогичным образом обстоит дело и с тензорами высших рангов. Допустим, что мы имеем тензор третьего ранга

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \Lambda_{klm}.$$

Повернутым тензором $\boldsymbol{\Lambda}'$ называем такой тензор, у которого все базисные векторы повернуты, а координаты сохранились, так что имеем

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_m\right) \Lambda_{klm}.$$

1.17. Полярное разложение тензора

Под полярным разложением тензора $\mathbf{T}$ понимается следующее его представление в виде произведения симметричного тензора и ортогонального тензора, т. е.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{T} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}, \tag{1.171}$$

где $\mathbf{K}$ — названный выше симметричный тензор, а $\mathbf{A}$ — ортогональный тензор.

Запишем выражение (1.171) в несколько измененной форме

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T\right) \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}.$$

Здесь слева добавлен множитель $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$, который, в силу (1.160), равен $\mathbf{E}$. Перегруппировывая сомножители в правой части, получим

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}, \tag{1.172}$$

где обозначено

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}. \tag{1.173}$$

Появившийся здесь тензор $\mathbf{H}$ является симметричным. Чтобы убедиться в этом, составляем тензор, транспонированный тензору $\mathbf{H}$. Имеем по (1.39) следующий результат

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} \equiv \mathbf{H},$$

который, конечно, убеждает.

Выражение (1.172) представляет собой альтернативное представление $\mathbf{T}$ в виде произведения ортогонального тензора $\mathbf{A}$ на симметричный тензор $\mathbf{H}$. Если в первом представлении симметричный тензор стоит слева, то во втором — справа, причем в силу (1.173) эти симметричные тензоры не равны друг другу. А вот ортогональный тензор $\mathbf{A}$ оказался одним и тем же в обоих представлениях.

Опять обратим внимание на уравнение (1.173) и умножим обе части его скалярно на $\mathbf{A}$ слева и на $\mathbf{A}^T$ справа. Тогда получим

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T.$$

Учитывая (1.160), найдем

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}^T.$$

Зададим тензор $\mathbf{H}$ в его главном базисе $\mathbf{e}_{(l)H}$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_{(l)H}\mathbf{e}_{(l)H}H_l, \qquad \left(\sum_l\right). \tag{1.174}$$

Подставив это разложение в выражение $\mathbf{K}$, получим

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_{(l)H}\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_{(l)H}\right)H_l, \qquad \left(\sum_l\right).$$

Мы нашли представление тензора $\mathbf{K}$ в его главном базисе

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_{(l)K}\mathbf{e}_{(l)K}K_l, \qquad \left(\sum_l\right). \tag{1.175}$$

Причем оказалось

$$\mathbf{e}_{(l)K} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_{(l)H}, \quad K_l = H_l.$$

Оказалось, что главные значения тензоров $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$ равны, а орты главного базиса тензора $\mathbf{K}$ равны повернутым ортам главного базиса тензора $\mathbf{H}$ (конечно, последнее имеет место, если ортогональный тензор $\mathbf{A}$ является тензором поворота).

Попытаемся выразить тензоры $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$ через исходный тензор $\mathbf{T}$. Для этого составим произведение $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T$, используя только (1.171), получим

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T = \left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{K}\right) = \mathbf{K}\cdot\mathbf{K} = \mathbf{K}^2. \tag{1.176}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T}. \tag{1.177}$$

Аналогичным образом, составив произведение $\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T}$ с помощью только выражения (1.172), получим

$$\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T} = \left(\mathbf{H}\cdot\mathbf{A}^T\right)\cdot\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}\right) = \mathbf{H}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{H}^2. \tag{1.178}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{H} = \left(\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T}}. \tag{1.179}$$

Исследуем вопрос о том, имеют ли смысл радикалы в формулах (1.177) и (1.179). Для этого докажем, что тензоры, стоящие под знаком радикала имеют положительные главные значения. Во-первых, это следует непосредственно из формул (1.176) и (1.178), ибо очевидно, что $\mathbf{K}^2$ и $\mathbf{H}^2$ являются симметричными тензорами и имеют, в силу разложений (1.174) и (1.175), следующие представления:

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{e}_{(l)K}\mathbf{e}_{(l)K}K_l^2, \qquad \left(\sum_l\right),$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{H}^2 = \mathbf{e}_{(l)H}\mathbf{e}_{(l)H} H_l^2, \qquad \left(\sum_l\right).$$

В силу известных теорем 1.4 и 1.5 о симметричных тензорах все K_l и H_l, входящие в записанные разложения, являются вещественными. Далее квадраты этих вещественных чисел являются положительными, и значит главные значения их K_l^2 и H_l^2 положительны. Таким образом, тензоры $\mathbf{K}^2$ и $\mathbf{H}^2$ являются положительными. Следовательно, подынтегральные выражения $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^T$ и $\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{T}$ в (1.177) и (1.179) положительны, а значит, вычисления радикалов в них вполне осмысленны.

Вычислим эти радикалы по формуле (1.127), полагая в ней $n = \frac{1}{2}$. Получим

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_{(l)K}\mathbf{e}_{(l)K}\left(K_l^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \left(\sum_l\right),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_{(l)H}\mathbf{e}_{(l)H}\left(H_l^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \left(\sum_l\right).$$

Легко понять, что имеют место следующие формулы

$$\left(K_l^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pm K_l, \qquad \left(H_l^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pm H_l.$$

Знак главных значений $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$ ничем не определен. Формулами (1.176) и (1.178) определены только квадраты, которые, конечно же, положительны. Поэтому лучше для определенности написать иначе

$$\left(K_l^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\left|K_l\right|, \qquad \left(H_l^2\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\left|H_l\right|. \tag{1.180}$$

Последние формулы в какой-то мере обосновывают появление знаков $\pm$ перед радикалами в формулах (1.177) и (1.179). Однако все не так просто: в разных главных значениях могут быть взяты разные знаки плюс или минус. Таким образом, например, тензор $\mathbf{K}$ может иметь следующие представления:

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \mathbf{e}_{(1)K}\mathbf{e}_{(1)K}\left|K_1\right| + \mathbf{e}_{(2)K}\mathbf{e}_{(2)K}\left|K_2\right| + \mathbf{e}_{(3)K}\mathbf{e}_{(3)K}\left|K_3\right|,\\
\mathbf{K}_2 &= -\mathbf{e}_{(1)K}\mathbf{e}_{(1)K}\left|K_1\right| - \mathbf{e}_{(2)K}\mathbf{e}_{(2)K}\left|K_2\right| - \mathbf{e}_{(3)K}\mathbf{e}_{(3)K}\left|K_3\right|,\\
\mathbf{K}_3 &= \mathbf{e}_{(1)K}\mathbf{e}_{(1)K}\left|K_1\right| + \mathbf{e}_{(2)K}\mathbf{e}_{(2)K}\left|K_2\right| - \mathbf{e}_{(3)K}\mathbf{e}_{(3)K}\left|K_3\right|,\\
\mathbf{K}_4 &= \mathbf{e}_{(1)K}\mathbf{e}_{(1)K}\left|K_1\right| - \mathbf{e}_{(2)K}\mathbf{e}_{(2)K}\left|K_2\right| - \mathbf{e}_{(3)K}\mathbf{e}_{(3)K}\left|K_3\right|,\\
\mathbf{K}_5 &= -\mathbf{e}_{(1)K}\mathbf{e}_{(1)K}\left|K_1\right| - \mathbf{e}_{(2)K}\mathbf{e}_{(2)K}\left|K_2\right| + \mathbf{e}_{(3)K}\mathbf{e}_{(3)K}\left|K_3\right|,\\
\mathbf{K}_6 &= -\mathbf{e}_{(1)K}\mathbf{e}_{(1)K}\left|K_1\right| + \mathbf{e}_{(2)K}\mathbf{e}_{(2)K}\left|K_2\right| + \mathbf{e}_{(3)K}\mathbf{e}_{(3)K}\left|K_3\right|.
\end{aligned}
\tag{1.181}
$$

Итак, оказалось, что радикалы в (1.177) и (1.179) многолики, т. е. многозначны. Постараемся внести некоторую определенность, т. е. однозначность.

Договоримся о том, что под $\mathbf{K}$ будем понимать только первое из выражений (1.181), т. е. будем считать, что симметричный тензор $\mathbf{K}$ в полярном разложении является положительным. Поэтому, определение полярного разложения (1.171), данное в начале этого раздела следует заменить следующим новым определением: «Под полярным разложением тензора второго ранга понимается следующее его представление в виде произведения симметричного положительного тензора и ортогонального тензора, т. е.

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{A},$$

где $\mathbf{K}$ — названный выше симметричный положительный тензор, а $\mathbf{A}$ — ортогональный тензор».

Итак, мы разобрались с симметричным тензором $\mathbf{K}$, попавшим в полярное разложение (1.171), т. е. выяснили, как он может быть вычислен через тензор $\mathbf{T}$. То же касается и симметричного тензора $\mathbf{H}$, попавшего в альтернативное полярное разложение (1.172).

Найдем теперь формулы для вычисления ортогонального тензора $\mathbf{A}$. Так, из (1.171) легко находим

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{T}. \tag{1.182}$$

Аналогично из уравнения (1.172) находим другое представление ортогонального тензора

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{H}^{-1}. \tag{1.183}$$

Итак, мы получили две разных формулы для вычисления ортогонального тензора $\mathbf{A}$. Представленный выше анализ продемонстрировал, что

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

тензоры $\mathbf{K}$ и $\mathbf{H}$ определены однозначно. Но тогда каждое из выражений $\mathbf{A}$ по (1.182) и по (1.183) тоже определено однозначно. Однако остается открытым вопрос о том, равны ли эти значения. Ведь возможно, что каждое из них вполне подходит быть ортогональным тензором в полярном разложении (1.171) и последующем за ним вторым полярным разложением (1.172) и даже быть участниками формулы (1.173). Однако они могут быть различными. Обсудим этот вопрос подробнее. Допустим, что (1.182) и (1.183) дают разные значения, и обозначим их $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, так что будем иметь

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{T}, \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{H}^{-1}. \tag{1.184}$$

Убедимся сначала, что каждое из этих выражений действительно дает ортогональный тензор. Для этого проверим, выполняются ли типичные для ортогональных тензоров равенства

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{A}_1 = \mathbf{E}, \tag{1.185}$$

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2^T = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{A}_2^T \cdot \mathbf{A}_2 = \mathbf{E}. \tag{1.186}$$

Начнем с первого равенства. Подставив в левую часть представление $\mathbf{A}_1$ по (1.184), получим

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \left(\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{T}\right)^T.$$

Учитывая (1.39), преобразуем это выражение к следующему виду

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}^{-1}.$$

Наконец, воспользовавшись равенством (1.176), завершим вычисление

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}^2 \cdot \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Как и должно быть по первой формуле (1.185), получилась тензорная единица.

Обратимся теперь ко второму условию (1.185). Следующая цепочка вычислений демонстрирует, что оно выполняется

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{A}_1 = \left(\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{T}\right)^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \\ &= \mathbf{T}^T \cdot \left(\mathbf{K}^2\right)^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}^{-T} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{1.187}$$

Следует иметь в виду, что обозначение $\mathbf{T}^{-T}$ имеет следующий смысл

$$\mathbf{T}^{-T} = (\mathbf{T}^{-1})^T = (\mathbf{T}^T)^{-1}.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Аналогичным образом убеждаемся в том, что $\mathbf{A}_2$ — тоже ортогональный тензор. Остается выяснить, равен ли он тензору $\mathbf{A}_1$. Для этого внесем в выражение $\mathbf{A}_2$ по (1.184) представление $\mathbf{T}$ по формуле (1.171), в которой $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$. Получим

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{H}^{-1}.$$

Умножим обе части этого равенства слева на единичный тензор

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T.$$

Получим следующее выражение

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{H}^{-1}.$$

Учитывая теперь равенство (1.173), найдем

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{A}_1. \tag{1.188}$$

Итак, мы убедились, что формулы (1.182) и (1.183) дают одно и то же значение ортогонального тензора $\mathbf{A}$.

1.18. Разложение симметричного тензора на шаровую часть и девиатор

Рассматриваем некоторый симметричный тензор $\mathbf{T}$. Его первый инвариант, как известно, вычисляется по формуле (1.143), а именно, по следующей формуле

$$\mathrm{I}_1 = \mathbf{E} \cdot\cdot \mathbf{T}.$$

Шаровой частью тензора $\mathbf{T}$ называется следующий тензор

$$\mathbf{Ш} = \frac{\mathrm{I}_1}{3}\mathbf{E}. \tag{1.189}$$

Девиатором тензора $\mathbf{T}$ называется разность между самим тензором и его шаровой частью, а именно

$$Dev\mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{\mathrm{I}_1}{3}\mathbf{E}. \tag{1.190}$$

Из этого равенства легко находим разложение тензора $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{I}_1}{3}\mathbf{E} + Dev\mathbf{T}. \tag{1.191}$$

Это разложение демонстрирует, что всякий симметричный тензор может быть представлен в виде суммы его шаровой части и девиатора. В силу

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

определения (1.190) замечаем, что девиатор симметричного тензора тоже является симметричным тензором. Как всякий симметричный тензор девиатор имеет свой главный базис и свои главные значения. Найдем их.

Для этого воспользуемся разложением тензора $\mathbf{T}$ в его главном базисе (1.122)

$$\mathbf{T} = t_n \mathbf{e}_{(n)} \mathbf{e}_{(n)}, \qquad \left(\sum_n \right).$$

Единичный тензор так же представим в главном базисе тензора $\mathbf{T}$, т. е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_{(n)} \mathbf{e}_{(n)}.$$

Подставив эти разложения в формулу (1.190), получим следующий результат

$$Dev\mathbf{T} = \left(t_n - \frac{\mathrm{I}_1}{3} \right) \mathbf{e}_{(n)} \mathbf{e}_{(n)}, \qquad \left(\sum_n \right).$$

Этот результат можно записать иначе

$$Dev\mathbf{T} = \chi_n \mathbf{e}_{(n)} \mathbf{e}_{(n)}, \qquad \left(\sum_n \right), \tag{1.192}$$

где обозначено

$$\chi_n = t_n - \frac{\mathrm{I}_1}{3}. \tag{1.193}$$

Разложение (1.192) представляет разложение девиатора в его главном базисе. Замечаем, что главный базис девиатора совпадает с главным базисом исходного тензора $\mathbf{T}$, а главные значения χ_n выражаются через главные значения тензора $\mathbf{T}$ по формуле (1.193).

Как и всякий симметричный тензор, девиатор имеет главные инварианты, которые обозначим $\mathrm{I}_1\left(Dev\mathbf{T}\right)$, $\mathrm{I}_2\left(Dev\mathbf{T}\right)$, $\mathrm{I}_3\left(Dev\mathbf{T}\right)$. По аналогии с (1.141) и (1.142) они имеют следующие представления через главные значения

$$\mathrm{I}_1\left(Dev\mathbf{T}\right) = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \tag{1.194}$$

$$\mathrm{I}_2\left(Dev\mathbf{T}\right) = \chi_2\chi_3 + \chi_1\chi_3 + \chi_1\chi_2, \tag{1.195}$$

$$\mathrm{I}_3\left(Dev\mathbf{T}\right) = \chi_1\chi_2\chi_3. \tag{1.196}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Однако эти стандартные формулы мало чего говорят. Найдем альтернативные формулы. Так, первый инвариант вычислим по формуле, аналогичной (1.143). Получим следующий результат

$$\mathrm{I}_1\left(Dev\mathbf{T}\right)=\mathbf{E}\cdot\cdot Dev\mathbf{T}. \tag{1.197}$$

Подставив сюда представление девиатора по формуле (1.190), найдем

$$\mathrm{I}_1\left(Dev\mathbf{T}\right)=\mathbf{E}\cdot\cdot\left(\mathbf{T}-\frac{\mathrm{I}_1}{3}\mathbf{E}\right)=\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_1=0. \tag{1.198}$$

Равенство нулю первого инварианта является характеристическим свойством девиатора. Отсюда следует, что девиатор от девиатора равен самому девиатору

$$Dev\left(Dev\mathbf{T}\right)=Dev\mathbf{T}.$$

Далее, сравнивая формулы (1.194) и (1.197), придем к важному тождеству

$$\mathrm{I}_1\left(Dev\mathbf{T}\right)=\chi_1+\chi_2+\chi_3=0, \tag{1.199}$$

ограничивающему величины главных значений девиатора.

Альтернативное представление второго инварианта найдем по формуле (1.144)

$$\mathrm{I}_2\left(Dev\mathbf{T}\right)=-\frac{1}{2}\left(\left(Dev\mathbf{T}\right)\cdot\cdot\left(Dev\mathbf{T}\right)-\mathrm{I}_1^2\left(Dev\mathbf{T}\right)\right),$$

которая в силу условия (1.198) приводит к следующему простому результату

$$\mathrm{I}_2\left(Dev\mathbf{T}\right)=-\frac{1}{2}\left(Dev\mathbf{T}\right)\cdot\cdot\left(Dev\mathbf{T}\right). \tag{1.200}$$

Заключаем, что второй инвариант всякого девиатора всегда отрицателен, и обращается в нуль, только если сам девиатор равен нулю.

Третий инвариант девиатора оставляем без особого внимания, ибо никакого впечатляющего факта установить не удается. Отметим только одно его представление (1.196).

Рассмотрим теперь два тензора: $\mathbf{\Lambda}$ и $\mathbf{M}$, и зададим их разложениями, подобными (1.191), т. е.

$$\mathbf{\Lambda}=\frac{\mathrm{I}_1\left(\mathbf{\Lambda}\right)}{3}\mathbf{E}+Dev\mathbf{\Lambda},\qquad \mathbf{M}=\frac{\mathrm{I}_1\left(\mathbf{M}\right)}{3}\mathbf{E}+Dev\mathbf{M}. \tag{1.201}$$

Составим произведение $\mathbf{\Lambda}\cdot\cdot\mathbf{M}$. С учетом (1.201) получим

$$\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\mathbf{M}=\left(\frac{\mathrm{I}_1(\boldsymbol{\Lambda})}{3}\mathbf{E}+Dev\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\cdot\left(\frac{\mathrm{I}_1(\mathbf{M})}{3}\mathbf{E}+Dev\mathbf{M}\right)=$$
$$=\frac{\mathrm{I}_1(\boldsymbol{\Lambda})\mathrm{I}_1(\mathbf{M})}{3}+\left(Dev\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\cdot\mathbf{E}\frac{\mathrm{I}_1(\mathbf{M})}{3}+\frac{\mathrm{I}_1(\boldsymbol{\Lambda})}{3}\mathbf{E}\cdot\cdot\left(Dev\mathbf{M}\right)+$$
$$+\left(Dev\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\cdot\left(Dev\mathbf{M}\right).$$

В силу формул (1.197) и (1.198) имеем

$$\mathbf{E}\cdot\cdot\left(Dev\mathbf{M}\right)=0,\qquad\left(Dev\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\cdot\mathbf{E}=0.$$

И тогда выражение произведения $\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\mathbf{M}$ сильно упрощается и принимает следующий вид

$$\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\mathbf{M}=\frac{1}{3}\mathrm{I}_1(\boldsymbol{\Lambda})\mathrm{I}_1(\mathbf{M})+\left(Dev\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\cdot\left(Dev\mathbf{M}\right).\tag{1.202}$$

Как видно, сюда вошли только шаровые части отдельно и девиаторы тоже отдельно, тогда как перекрестных произведений их вообще не вошло в окончательный результат (1.202).

1.19. Инвариантность тензорных и векторных соотношений

Полагаем, что мы имеем набор разнообразных тензоров разных рангов. Сначала идут скаляры, потом векторы, потом тензоры второго ранга и далее тензоры высших рангов. С их помощью можно составить разные формулы, по которым одни тензоры выражаются через комбинации других. Все представленное выше построение тензорного исчисления, а именно, прямого тензорного или инвариантного тензорного исчисления было осуществлено на базе понятия вектора. Понятие вектора — это инвариантное понятие: он определяется двумя параметрами — направлением и длиной. Однако всякий вектор может быть представлен в виде разложения по элементам некоторого ортонормированного базиса. В этом случае появляются такие понятия, как координаты вектора или его проекции на орты базиса. Их три. Они полностью определяют вектор, правда, всего лишь в одном базисе. Сколько базисов, столько и троек координат. Изумительная красота векторного исчисления состоит в том, что записанные с его помощью соотношения между векторами не зависят от базисов, в которых могут быть заданы векторы. Представляется бесспорным, что в инвариантном тензорном исчислении это свойство сохранится. Это означает, что соотно-

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

шения между тензорами и векторами выражают некоторые инвариантные соотношения, которые, конечно же, не зависят от используемых векторного и тензорного базисов.

Выше рассматривались два таких базиса: старый $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ и новый $\mathbf{i}'_1$, $\mathbf{i}'_2$, $\mathbf{i}'_3$. Мы видим как связаны между собой координаты векторов и тензоров в старом и новом базисах. Мы все твердо убеждены в том, что все инвариантные соотношения между векторами и тензорами могут быть выражены через координаты векторов и тензоров в каждом из базисов.

Я намерен сейчас обсудить вопрос о том, что случится, если в новом базисе использовать старые координаты, или, наоборот, в старом базисе — новые координаты.

С одной группой таких векторов и тензоров мы уже встречались. Это так называемые повернутые векторы и тензоры. В этом случае в новом базисе использовались старые координаты

$$\mathbf{a}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{i}'_k a_k, \qquad \mathbf{\Lambda}' = \mathbf{i}'_k \mathbf{i}'_k \Lambda_{kl} ..., \tag{1.203}$$

где a_k и Λ_{kl} — старые координаты.

Сформулированный выше вопрос можно переформулировать более определенно так: сохранится ли некоторое соотношение между векторами и тензорами, если вместо векторов $\mathbf{a}$... и тензоров $\mathbf{\Lambda}$... и т. д. подставить их повернутые значения?

Замечание 1.9. Я использую термин «повернутый». Этот термин буквально передает содержание, вкладываемое в него, если тензор $\mathbf{A}$ является тензором поворота. Ну а как назвать вектор $\mathbf{a}'$... и тензор $\mathbf{A}'$..., если тензор $\mathbf{A}$ является тензором отражения или комбинацией тензоров поворота и отражений. Можно, конечно, назвать его преобразованным, включая в понятие «преобразованный» и поворот, и отражение, и их комбинацию. Но этот термин какой-то слишком обобщенный и поэтому сухой и невыразительный. Поэтому я сохраняю термин «повернутый», подразумевая, что он может быть и собственно поворотом и отражением и их комбинацией.

Сформулируем поставленный выше вопрос еще более ясно. Допустим, что мы имеем некоторую формулу, связывающую между собой тензор $\mathbf{M}$ и тензоры $\mathbf{\Lambda}$..., ${}^3\mathbf{P}$..., ${}^4\mathbf{S}$... и вектор $\mathbf{a}$..., а именно,

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{a}..., \mathbf{\Lambda}..., {}^3\mathbf{P}..., {}^4\mathbf{S}...\right) = \mathbf{M}. \tag{1.204}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Возникает вопрос. Если теперь заменить все аргументы на их повернутые значения, то окажется ли функция $\mathbf{\Phi}$ тоже повернутым тензором?

Говоря иными словами: будет ли выполнено следующее тождество

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{a}'..., \mathbf{\Lambda}'..., {}^3\mathbf{P}'..., {}^4\mathbf{S}'...) = \mathbf{M}'? \qquad (1.205)$$

Многие даже очень продвинутые студенты не готовы сразу ответить на этот вопрос. Между тем ответ ясен и прост. Конечно, выполняются, ибо (1.204) выражает некоторое инвариантное тензорное соотношение.

Привожу ниже рассуждение, которое убедит всякого, даже очень недоверчивого студента или читателя.

Начну с того, что запишу тензорные соотношения (1.204) и (1.205) в виде формул, связывающих представления в их базисах — старом и новом. Они таковы

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{i}_k a_k ..., \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \Lambda_{kl} ..., \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_r P_{klr} ..., \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_r \mathbf{i}_s S_{klrs} ...\right) = \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n M_{mn}, \qquad (1.206)$$

$$\mathbf{\Phi}\left(\mathbf{i}'_k a_k ..., \mathbf{i}'_k \mathbf{i}'_l \Lambda_{kl} ..., \mathbf{i}'_k \mathbf{i}'_l \mathbf{i}'_r P_{klr} ..., \mathbf{i}'_k \mathbf{i}'_l \mathbf{i}'_r \mathbf{i}'_s S_{klrs} ...\right) = \mathbf{i}'_m \mathbf{i}'_n M_{mn}, \qquad (1.207)$$

где орты нового базиса выражаются через орты старого по формулам (1.158)

$$\mathbf{i}'_m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_m. \qquad (1.208)$$

Внося эти представления в (1.207), получим развернутую запись предполагаемого равенства (1.207)

$$\begin{gathered}\mathbf{\Phi}\Big(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k a_k ..., (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l)\Lambda_{kl} ..., (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_r) P_{klr} ..., \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_r)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_p) S_{klrp} ...\Big) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_m)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_n) M_{mn}.\end{gathered} \qquad (1.209)$$

Однако, продолжим. Напоминаю, что тензорная функция (1.204) образована с использованием только тех операций над тензорами и векторами, которые были введены выше. Это операции сложения, операция умножения на число, и наконец, многочисленные операции умножения тензоров и векторов, введенные в разделе 1.5. Никаких других операций не было введено, а значит, они и не будут использоваться ниже. Это элементарные операции, с помощью которых составляется более сложная операция (1.204). Представляется верным утверждение: если эти элементарные операции над векторами и тензорами окажутся справедливыми для повернутых векторов и тензоров, то справедливым окажется и равенство (1.205), т. е. оно превратится в тождество.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Итак, нам предстоит убедиться только в том, что (1.205) выполняется для элементарных операций.

Начнем с операции сложения векторов

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{1.210}$$

Нам предстоит доказать, что имеет место тождество

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'. \tag{1.211}$$

Для этого умножим обе части равенства (1.210) на $\mathbf{A}$ слева. Получим

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}.$$

Но ведь здесь появились как раз повернутые векторы, так что (1.211) выполняется!

Перейдем к сложению тензоров второго ранга

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + \mathbf{P}. \tag{1.212}$$

В некотором ортонормированном начальном базисе это соотношение имеет вид

$$\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l S_{kl} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l T_{kl} + \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l P_{kl}. \tag{1.213}$$

Умножив обе части этого равенства на $\mathbf{A}$ слева и на $\mathbf{A}^T$ справа и преобразуя, получим

$$\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l\right) S_{kl} = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l\right) T_{kl} + \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l\right) P_{kl}.$$

Здесь появились повернутые тензоры, т. е.

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}' + \mathbf{P}'. \tag{1.214}$$

Но ведь именно это и требовалось доказать!

Рассмотрим теперь умножение тензора на число

$$\mathbf{\Pi} = \alpha \mathbf{T}.$$

Опять умножим обе части этого равенства на $\mathbf{A}$ слева и на $\mathbf{A}^T$ справа, получим

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{A}^T = \alpha \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T$$

или

$$\mathbf{\Pi}' = \alpha \mathbf{T}',$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к произведениям векторов и тензоров. Они определены таким образом, что в их определении предусмотрены операции над векторами, входящими в диады тензоров. Таких операций предусмотрено всего три: скалярное произведение, векторное произведение и тензорное произведение

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\lambda = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{ab}. \tag{1.215}$$

Если окажется, что эти равенства будут верными для повернутых векторов, то тогда окажутся верными и все равенства, содержащие многочисленные произведения тензоров и векторов, введенные в разделе 1.5.

Начнем со скалярного произведения (1.215). Подлежит обсуждению равенство

$$\lambda = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'. \tag{1.216}$$

Внесем в правую часть этого предполагаемого равенства повернутые значения векторов. Тогда получим

$$\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}' = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}\right)\cdot\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}\right) = \left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}^T\right)\cdot\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}\right) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Подстановка этого значения в (1.216) дает следующий результат

$$\lambda = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Но это равенство выполняется по определению (1.215)!

Аналогично поступим с тензорным произведением. Внося в правую часть предполагаемого равенства повернутые значения, получим

$$\mathbf{a}'\mathbf{b}' = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}\right) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{ab}\cdot\mathbf{A}^T. \tag{1.217}$$

Но по определению (1.215) произведение $\mathbf{ab}$ равно $\mathbf{\Lambda}$, и тогда из (1.217) находим

$$\mathbf{a}'\mathbf{b}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{\Lambda}', \tag{1.218}$$

в чем и следовало убедиться.

С векторным произведением дело обстоит сложнее. Запишем его в форме (1.61), т. е.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{b}, \tag{1.219}$$

в котором кроме векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ фигурирует еще и тензор Леви – Чивита

$${}^3\mathbf{L} = +\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m\mathbf{i}_p\varepsilon_{nmp}. \tag{1.220}$$

Нам предстоит убедиться в справедливости следующего равенства

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}'\cdot{}^3\mathbf{L}'\cdot\mathbf{b}', \tag{1.221}$$

в котором присутствуют не только повернутые векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, но и еще повернутый тензор Леви – Чивита

$${}^3\mathbf{L}' = +\mathbf{i}'_n\mathbf{i}'_m\mathbf{i}'_p\varepsilon_{nmp}, \tag{1.222}$$

который в силу (1.158) можно записать еще и так

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$ {}^3\mathbf{L}' = +\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_n\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_p\right)\varepsilon_{nmp}. \tag{1.223} $$

Вносся в правую часть предполагаемого равенства все повернутые значения, получим

$$ \mathbf{a}'\cdot{}^3\mathbf{L}'\cdot\mathbf{b}' = +\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}\right)\cdot\left(\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_n\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_p\right)\varepsilon_{nmp}\right)\cdot\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}\right). $$

Проведем перемножения в правой части. Это дает следующий результат

$$ \mathbf{a}'\cdot{}^3\mathbf{L}'\cdot\mathbf{b}' = +\left(\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{i}_n\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_p\cdot\left(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{b}\right)\varepsilon_{nmp} = $$

$$ = +\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_n\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_p\cdot\mathbf{b}\right)\varepsilon_{nmp}. $$

Наконец, умножая обе части этого равенства на $\mathbf{A}^T$ слева, придем к следующему соотношению

$$ \mathbf{A}^T\cdot\left(\mathbf{a}'\cdot{}^3\mathbf{L}'\cdot\mathbf{b}'\right) = +\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_n\right)\left(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_p\cdot\mathbf{b}\right)\varepsilon_{nmp} = $$

$$ = +\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m\mathbf{i}_p\varepsilon_{nmp}\right)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot{}^3\mathbf{L}\cdot\mathbf{b}. $$

Но по определению это как раз $\mathbf{c}$, т. е.

$$ \mathbf{A}^T\cdot\left(\mathbf{a}'\cdot{}^3\mathbf{L}'\cdot\mathbf{b}'\right) = \mathbf{c}. $$

Умножение обеих частей этого равенства на $\mathbf{A}$ приводит к следующему окончательному результату

$$ \mathbf{c}' = +\mathbf{a}'\cdot{}^3\mathbf{L}'\cdot\mathbf{b}'. $$

А это как раз то самое тождество (1.221), справедливость которого мы должны были доказать.

Итак, инвариантность тензорных операций имеет место для всех элементарных операций. Следовательно, эта инвариантность имеет место и для более сложных операций.

Замечание 1.10. Значительный интерес для последующих рассуждений представляет вопрос о взаимосвязи тензоров Леви – Чивита в исходном базисе (1.220) и в новом — повернутом — (1.222).

Полагаем, для определенности, что исходный базис является правым. В силу определения (1.59) тензор Леви – Чивита имеет в этом базисе известное представление (1.220). А «повернутый» тензор ${}^3\mathbf{L}'$ имеет представление (1.223).

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Если ортогональный тензор $\mathbf{A}$ является тензором поворота, то новые базисные векторы $\mathbf{i}'_n$ тоже образуют правую систему. И тогда в силу (1.223) оказывается, что тензор Леви – Чивита имеет одинаковые координаты ε_{nmp} в любом ортогональном базисе. Такие тензоры обычно называют изотропными. Один такой тензор уже встречался ранее. Это единичный тензор $\mathbf{E}$. Его координаты в любом базисе образуют единичную матрицу. Более того, его «повернутое» значение равно исходному, т. е. справедливо тождество

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}. \tag{1.224}$$

В этом убеждает следующая цепочка равенств

$$\mathbf{E}' = \mathbf{i}'_n\mathbf{i}'_n = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_n\right)\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_n\right) = \left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_n\right)\left(\mathbf{i}_n\cdot\mathbf{A}^T\right) =$$
$$= \mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{i}_n\mathbf{i}_n\right)\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{i}'_n\mathbf{i}'_n = \mathbf{i}_n\mathbf{i}_n. \tag{1.225}$$

Возникает вопрос: обладает ли тензор Леви – Чивита подобным свойством

$${}^3\mathbf{L}' = {}^3\mathbf{L} \tag{1.226}$$

или

$$\mathbf{i}'_n\mathbf{i}'_m\mathbf{i}'_p\varepsilon_{nmp} = \mathbf{i}_n\mathbf{i}_m\mathbf{i}_p\varepsilon_{nmp}\,? \tag{1.227}$$

Если старый базис и новый базис одноименны, т. е., например, правые, то такое возможно, ибо тогда все равно, в каком базисе задать этот тензор. Все кардинально изменяется, если ортогональный тензор, осуществляющий переход от старого базиса к новому является тензором отражения. Допустим, например, что он осуществляет преобразование инверсии, при котором соответствующие базисные векторы превращаются в противоположные, т. е.

$$\mathbf{i}'_1 = -\mathbf{i}_1,\quad \mathbf{i}'_2 = -\mathbf{i}_2,\quad \mathbf{i}'_3 = -\mathbf{i}_3.$$

Соответствующий тензор $\mathbf{A}$ имеет выражение

$$\mathbf{A} = -\mathbf{E}, \tag{1.228}$$

и тогда из (1.222) получаем

$${}^3\mathbf{L}' = \mathbf{i}'_n\mathbf{i}'_m\mathbf{i}'_p\varepsilon_{nmp} = \left(-\mathbf{i}_n\right)\left(-\mathbf{i}_m\right)\left(-\mathbf{i}_p\right)\varepsilon_{nmp} = -\mathbf{i}_n\mathbf{i}_m\mathbf{i}_p\varepsilon_{nmp} = -\mathbf{L}. \tag{1.229}$$

Этот результат можно записать и так:

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$ {}^3\mathbf{L}' = \mathbf{i}_n \mathbf{i}_m \mathbf{i}_p \left(-\varepsilon_{nmp} \right). \tag{1.230} $$

В чем же мы убедились в результате всех этих вычислений? Даже при инверсии координаты тензора Леви – Чивита в новом базисе оказались такими, какими они были в старом базисе. Но убедились мы и в том, что координаты отраженного тензора Леви – Чивита в старом базисе имеют измененный знак.

Итак, если векторный базис преобразуется из правого в левый, то тензор Леви – Чивита изменяет знак! Как же такое может быть? Ведь его координаты в новом базисе такие же, как и были в старом! Так ведь базис изменился на противоположный! В этом все и дело. Представление (1.230) есть представление нового — повернутого — тензора Леви – Чивита в старом базисе. Тогда и понятно изменение знака координат. С эти обстоятельством мы уже встречались выше в разделе 1.7.

Итак, какой же ответ на вопрос о возможности выполнения равенств (1.226) или (1.227)? Ответ отрицателен! При преобразовании поворота такое еще возможно, но вот при преобразовании инверсии это невозможно. Более того, имеет место компрометирующее равенство (1.229), полностью разрушающее идею, заложенную в вопросе (1.226) или (1.227). Кстати, можно показать, что (1.229) имеет место не только при инверсии, но и при любых отражениях в каждой из координатных плоскостей, и вообще, при других отражениях.

Таким образом, в произвольном случае имеем

$$ {}^3\mathbf{L}' \neq \mathbf{L}, \tag{1.231} $$

т. е. «повернутый» тензор Леви – Чивита может быть и не равен тензору Леви – Чивита. Это тем более удивляет и поражает, что такого не может случиться с другим, тоже изотропным тензором $\mathbf{E}$!

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

2.1. Простейшие сведения из теории криволинейных координат

Полагаем, что все происходит в трехмерном эвклидовом пространстве. Положение точки в этом пространстве определяется радиус-вектором $\mathbf{r}$. Полагаем, что положение точки может быть задано также тремя криволинейными координатами q_1, q_2 и q_3, так что радиус вектор $\mathbf{r}$ может быть выражен через них следующим образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(q_1, q_2, q_3\right). \tag{2.1}$$

Полагаем, что это однозначная непрерывная вектор-функция, имеющая столько непрерывных производных, сколько понадобится в последующих рассуждениях. Более того, полагаем, что между положением точки и криволинейными координатами существует взаимно-однозначное соответствие. А это добавляет к уже сказанному еще одно дополнительное свойство функции (2.1). Оно означает, что если задан вектор $\mathbf{r}$, то обобщенные координаты q_1, q_2 и q_3 могут быть вычислены из (2.1) однозначно. Тем самым (2.1) неявно задает функции $q_1(\mathbf{r})$, $q_2(\mathbf{r})$ и $q_3(\mathbf{r})$. Чтобы ясно понять, о чем идет речь, зададим вектор $\mathbf{r}$ в прямоугольной ортогональной декартовой системе координат следующим разложением

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_k x_k, \tag{2.2}$$

где x_k — декартовы координаты точки $\mathbf{r}$.

Тогда соотношение (2.1) можно записать в координатной форме следующим образом

$$x_k = x_k\left(q_1,\ q_2,\ q_3\right), \qquad k = 1,2,3. \tag{2.3}$$

Понятно, что (2.3) определяет неявные функции обобщенных координат от декартовых координат точки.

Чтобы соотношения (2.3) были бы действительно разрешимы относительно обобщенных координат q_1, q_2, q_3, якобиан преобразования (2.3) не должен обращаться в нуль, т. е.

$$J = \left|\frac{\partial x_k}{\partial q_r}\right| \neq 0, \tag{2.4}$$

или в развернутом виде

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_2}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.5}$$

Если зафиксировать какие-нибудь две криволинейные координаты и изменять только одну, оставшуюся, то выражение (2.1) будет описывать в пространстве некоторую линию. Таких линий ровно три — по числу криволинейных координат.

Например, на рис. 2.1 изображены такие линии, проходящие через одну типичную точку M. Векторы $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}$ представляют собой векторы, касательные к координатным линиям. Длину этих векторов обозначим H_k, т. е.

$$H_k = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right| \tag{2.6}$$

и назовем коэффициентами Ламе, а единичные векторы, направленные в сторону возрастания координат q_k обозначим $\mathbf{e}_k$, так что имеем

$$\mathbf{e}_k = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right|}, \qquad \left(\cancel{\sum_k} \right). \tag{2.7}$$

Важно иметь в виду, что и коэффициенты Ламе H_k и векторы $\mathbf{e}_k$ зависят от криволинейных координат q_1, q_2, q_3, а значит изменяются от точки к точке, т. е. зависят, в конечном счете, от вектора $\mathbf{r}$.

Для того, чтобы сильно упростить последующие формулы, вводим сильное требование об ортогональности векторов $\mathbf{e}_k$

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}. \tag{2.8}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

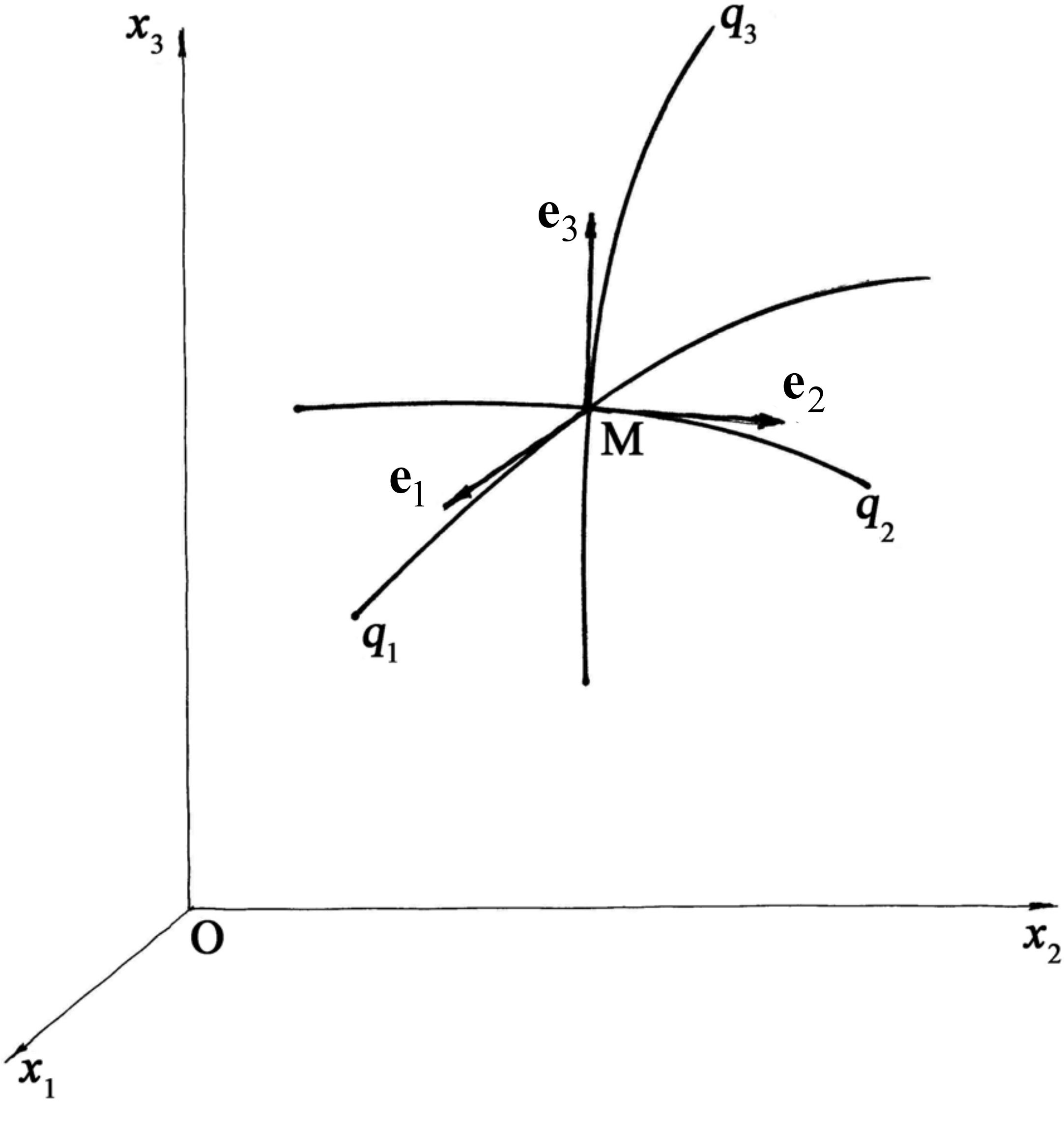

Рис. 2.1. Криволинейная ортогональная система координат

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Простейшими и наиболее употребительными криволинейными ортогональными системами координат является цилиндрическая и сферическая системы. Система ортов $\mathbf{e}_k$ может быть принята в качестве базисных для векторов и, соответственно, тензоров. Тогда всякий вектор или тензор могут быть заданы своими разложениями в этих базисах

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_k u_k, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \Lambda_{kl}. \tag{2.10}$$

2.2. Оператор Гамильтона

Рассмотрим некоторую вектор-функцию как функцию вектора положения $\mathbf{r}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}). \tag{2.11}$$

Подставив сюда представление вектора $\mathbf{r}$ через криволинейные координаты (2.1), получим выражение вектора $\mathbf{u}$ через эти криволинейные координаты

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(q_1, q_2, q_3). \tag{2.12}$$

Вычислим дифференциал функции $\mathbf{u}$.

Очевидно, имеем

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k}\, dq_k. \tag{2.13}$$

Домножив на H_k и поделив на H_k, получим

$$d\mathbf{u} = H_k dq_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k}, \qquad \left(\sum_k\right). \tag{2.14}$$

Легко увидеть, что это выражение можно представить в форме скалярного произведения

$$d\mathbf{u} = \left(\mathbf{e}_k H_k dq_k\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_l}{H_l}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_l}\right), \qquad \left(\sum_{k,l}\right). \tag{2.15}$$

Левый вектор в этом произведении в силу (2.7) и (2.6) может быть записан следующим образом

$$\mathbf{e}_k H_k dq_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_k = d\mathbf{r}. \tag{2.16}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Второй член — тензор — можно записать в форме суммы диад или диады

$$\frac{\mathbf{e}_l}{H_l}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_l} = \nabla \mathbf{u}, \qquad \left(\sum_l\right), \tag{2.17}$$

где вектор ∇ имеет представление

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_l}{H_l}\frac{\partial}{\partial q_l}, \qquad \left(\sum_l\right). \tag{2.18}$$

Используя (2.16) и (2.18) можем переписать (2.15) в следующей простой форме

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{r} \cdot \left(\nabla \mathbf{u}\right). \tag{2.19}$$

Появившийся здесь вектор (2.18) называется оператором Гамильтона. Эффект его действия на вектор $\mathbf{u}$ определен соотношением (2.17). Однако прежде чем использовать его для истолкований запишем диаду $\nabla \mathbf{u}$ именно как диаду

$$\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{e}_l}{H_l}\frac{\partial}{\partial q_l}\right)\mathbf{u}, \qquad \left(\sum_l\right). \tag{2.20}$$

Первое представление здесь это диада, а второе в силу соотношений эквивалентности — сумма диад. Как сделать так, чтобы второе представление (2.20) в точности совпало с первым представлением (2.17)? Ответ таков: следует рассматривать дифференциальный оператор $\partial / \partial q_l$ как числовой множитель и передать его второму вектору! Следует также иметь в виду и то, что оператор дифференцирования $\partial / \partial q_l$ должен быть применен не только к координатам вектора $\mathbf{u}$, но и к базисным векторам. Так что имеем

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial q_k}\mathbf{e}_l u_l = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial q_k}\right)u_l + \mathbf{e}_l\left(\frac{\partial u_l}{\partial q_k}\right). \tag{2.21}$$

Здесь появились производные ортов $\mathbf{e}_l$ по криволинейным координатам. В теории криволинейных координат эти производные определяются так называемыми деривационными формулами. Общее их написание можно найти в любом курсе, в котором рассматриваются криволинейные координаты. На подробностях не останавливаемся. Для нашего рассмотрения важно только то, что орты $\mathbf{e}_l$ должны быть продифференцированы в прин-

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

ципе, и результаты должны быть включены в (2.21). Зачем нужно упоминать это очевидное обстоятельство? Необходимость этого становится понятной, если истолковать то, что написано в (2.19). А там написано, что сначала должна быть выполнена операция, содержащаяся в скобке, а умножение следует сделать уже потом. А в скобке записана операция дифференцирования, о которой уже говорилось. Таким образом, в (2.19) написано, что сначала должно быть проведено дифференцирование в скобке и только потом скалярное умножение. Было бы совершенно неправильно сначала провести умножение и затем уже дифференцирование.

Получим альтернативную формулу для дифференциала $d\mathbf{u}$. Снова вернемся к представлению (2.14) и запишем его по-другому

$$d\mathbf{u} = H_k dq_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k} H_k dq_k, \qquad \left(\sum_k\right). \tag{2.22}$$

Этот результат можно записать в форме скалярного произведения

$$d\mathbf{u} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k}\frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\right)\cdot\left(\mathbf{e}_l H_l dq_l\right), \qquad \left(\sum_{k,l}\right). \tag{2.23}$$

Второй множитель здесь опять-таки равен $d\mathbf{r}$ в силу (2.16). А первый можно записать следующим образом

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k}\frac{\mathbf{e}_k}{H_k} = \mathbf{u}\nabla, \qquad \left(\sum_k\right). \tag{2.24}$$

Замечаем, что здесь опять появился оператор Гамильтона, однако он теперь стоит справа от функции $\mathbf{u}$, на которую он действует. Чтобы убедиться в справедливости формулы (2.24), запишем $\mathbf{u}\nabla$ в развернутом виде

$$\mathbf{u}\nabla = \mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\right) = \mathbf{u}\frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}, \qquad \left(\sum_k\right).$$

В двух первых представлениях формально содержатся диады, а в последнем — сумма диад. Чтобы эта сумма совпала с (2.24), необходимо рассматривать оператор дифференцирования $\partial/\partial q_k$ как числовой множитель и в соответствии с соотношениями эквивалентности передать его левому вектору.

Подставляя (2.16) и (2.24) в (2.23) получаем альтернативное представление дифференциала

$$d\mathbf{u} = \left(\mathbf{u}\nabla\right)\cdot d\mathbf{r}.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Объединяя его с представлением (2.19), приходим к следующим выражениям дифференциала

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{r}\cdot\left(\nabla\mathbf{u}\right) = \left(\mathbf{u}\nabla\right)\cdot d\mathbf{r}. \tag{2.25}$$

Следует напомнить, что в этих формулах сначала выполняется операция дифференцирования в скобках и только потом скалярное умножение на $d\mathbf{r}$.

В последующих рассмотрениях часто будут встречаться тензоры $\nabla\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}\nabla$. Вычислим их. Имеем по (2.17) и по (2.24) следующие выражения

$$\nabla\mathbf{r} = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_k}, \qquad \mathbf{r}\nabla = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_k}\frac{\mathbf{e}_k}{H_k}, \qquad \left(\sum_k\right).$$

Учитывая (2.6) и (2.7), получаем следующие результаты

$$\nabla\mathbf{r} = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{r}\nabla = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k.$$

В обоих случаях получился единичный тензор, так что имеем

$$\nabla\mathbf{r} = \mathbf{r}\nabla = \mathbf{E}. \tag{2.26}$$

Аналогичным образом вычисляем следующие величины

$$\nabla\cdot\mathbf{r} = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{e}_k\cdot\frac{1}{H_k}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_k} = \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k = 3, \tag{2.27}$$

$$\nabla\times\mathbf{r} = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\times\mathbf{r} = \mathbf{e}_k\times\frac{1}{H_k}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_k} = \mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_k = 0. \tag{2.28}$$

2.3. Особенности применения правила Лейбница для дифференцирования произведения при работе с оператором Гамильтона.

Допустим, что мы имеем произведение тензора $\mathbf{\Lambda}$ на вектор $\mathbf{u}$, т. е. $\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{u}$, и пусть нам предстоит вычислить $\nabla\cdot(\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{u})$.

Действуем по формуле (2.18) и получаем

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right) = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\cdot\left(\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right). \tag{2.29}$$

Вычисляя производную по q_k находим

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right) = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{\Lambda}}{\partial q_k}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{\Lambda}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial q_k}\right) = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{\Lambda}}{\partial q_k}\right)\cdot\mathbf{u} + \frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial q_k}.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

В первом слагаемом вновь выделяем оператор Гамильтона, а во втором — используем формулу (1.37). В результате получаем

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right)=\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial q_k}\frac{\mathbf{e}_k}{H_k}\right)$$

или

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right)=\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\left(\mathbf{u}\nabla\right). \tag{2.30}$$

Этот же результат можно получить проще, вообще не прибегая к использованию формулы (2.18) для оператора Гамильтона.

Напишем следующее выражение

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right)=\overset{\uparrow}{\nabla}\cdot(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\mathbf{u})+\overset{\uparrow}{\nabla}\cdot(\overset{\rightarrow}{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}).$$

Написав такие стрелки, подразумеваем, что в первом члене осуществляется дифференцирование по q_k только тензора $\boldsymbol{\Lambda}$, а во втором — только вектора $\mathbf{u}$. Остается теперь так преобразовать правую часть, чтобы оператор Гамильтона оказался рядом с объектом, на который он действует, т. е. рядом с объектом, на который направлена стрелка. При этом следует использовать формулы тензорной алгебры. В настоящем случае это формула (1.35) и формула (1.37), уже упомянутые раньше. В результате получаем

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right)=(\overset{\rightarrow}{\nabla}\cdot\overset{\downarrow}{\boldsymbol{\Lambda}})\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\overset{\leftarrow}{\nabla}).$$

Теперь уже стрелки можно убрать, предполагая, что операции, указанные в скобках, выполняются раньше других. Результат таков

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{u}\right)=\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\Lambda}\right)\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\Lambda}\cdot\cdot\left(\mathbf{u}\nabla\right).$$

Он в точности совпадает с (2.30). Представляется, что вторая процедура проще, хотя бы по числу типографских знаков, которые приходится использовать для ее записи. Для ее записи используется вдвое меньше знаков, чем при записи первой процедуры.

Ниже приводятся некоторые примеры применения описанной процедуры.

$$\begin{aligned}1.\ \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})&=\overset{\rightarrow}{\nabla}(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b})+\overset{\uparrow}{\nabla}(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})=(\overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{\mathbf{a}})\cdot\mathbf{b}+(\overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})\cdot\mathbf{a}=\\&=(\nabla\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}+(\nabla\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$2.\ \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\overset{\rightarrow}{\nabla}\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\times\mathbf{b})+\overset{\uparrow}{\nabla}\cdot(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})=\mathbf{b}\cdot(\overset{\rightarrow}{\nabla}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{a}})+\mathbf{a}\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}\times\overset{\leftarrow}{\nabla})=$$
$$=\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b}). \tag{2.32}$$

$$3.\ \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\overset{\rightarrow}{\nabla}\times(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\times\mathbf{b})+\overset{\uparrow}{\nabla}\times(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})=$$
$$=\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}(\overset{\leftarrow}{\nabla}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}\cdot(\overset{\rightarrow}{\nabla}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{a}})+\mathbf{a}(\overset{\rightarrow}{\nabla}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})-\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}(\overset{\leftarrow}{\nabla}\cdot\mathbf{a})= \tag{2.33}$$
$$=(\mathbf{a}\nabla)\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{b}\nabla)\cdot\mathbf{a}.$$

$$4.\ \nabla\cdot(\mathbf{a}\mathbf{b})=\overset{\rightarrow}{\nabla}\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b})+\overset{\uparrow}{\nabla}\cdot(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}\,\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})=(\overset{\rightarrow}{\nabla}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{a}})\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot(\overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})=$$
$$=(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot(\nabla\mathbf{b}). \tag{2.34}$$

$$5.\ \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b})=\overset{\rightarrow}{\nabla}(\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b})+\overset{\uparrow}{\nabla}(\overset{\rightarrow}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{b}})=(\overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{b}+\overset{\rightarrow}{\nabla}(\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{A}^T)=$$
$$=(\nabla\mathbf{A})\cdot\mathbf{b}+(\nabla\mathbf{b})\cdot\mathbf{A}^T. \tag{2.35}$$

К сожалению, этот простой прием не всегда срабатывает полностью. Говоря определеннее, не всегда удается с использованием правил алгебры так преобразовать полученное выражение, чтобы оператор Гамильтона оказался рядом с объектом, на который он действует, как оператор дифференцирования.

Вот один пример, где происходит именно так:

$$6.\ \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\overset{\rightarrow}{\nabla}(\overset{\downarrow}{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B})+\overset{\uparrow}{\nabla}(\overset{\rightarrow}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{B}})=(\overset{\rightarrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{B}+\overset{\uparrow}{\nabla}(\overset{\rightarrow}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{B}})=$$
$$=(\nabla\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}+\overset{\uparrow}{\nabla}(\overset{\rightarrow}{\mathbf{A}}\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{B}}).$$

2.4. Операторы Гамильтона и Лапласа в прямоугольной, цилиндрической и сферической ортогональных координатных системах

В этом разделе рассматриваем наиболее употребительные координатные системы.

1. Рассмотрим прямоугольную ортогональную декартову координатную систему. Такая координатная система изображена на рис. 2.2. Оси ox_1, ox_2 и ox_3 являются прямолинейными и ортогональными. Какой же смысл вкладывается в слово «декартова». Как будто бы все уже сказано: оси прямые и ортогональные. Зачем же тогда добавление слова «декартова»? В

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

него вложен следующий смысл: один и тот же масштаб использован на каждой из осей координат.

Принимаем x_1, x_2 и x_3 в качестве обобщенных координат q_1, q_2 и q_3, т. е.

$$q_k = x_k. \tag{2.36}$$

Радиус вектор имеет стандартное представление (2.2)

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_k x_k, \tag{2.37}$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ — орты осей координат.

Если положить

$$q_2 = x_2 = const, \qquad\qquad q_3 = x_3 = const$$

и изменять только координату x_1, то получим первую координатную линию.

Такая линия, проходящая через типичную точку M, показана на рис. 2.2. Она параллельна первой оси координат. Аналогичным образом построены вторая и третья координатные линии, проходящие через точку M. Они параллельны двум другим координатным осям.

С помощью (2.36) и (2.37) вычисляем

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k, \tag{2.38}$$

после чего с помощью (2.6), (2.7) находим базисные векторы $\mathbf{e}_k$ и коэффициенты Ламе

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{i}_k, \quad H_k = 1. \tag{2.39}$$

В результате с использованием определения (2.18) получаем следующее представление оператора Гамильтона

$$\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{2.40}$$

Оператор Лапласа имеет следующее выражение

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left(\mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \cdot \left(\mathbf{i}_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}. \tag{2.41}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

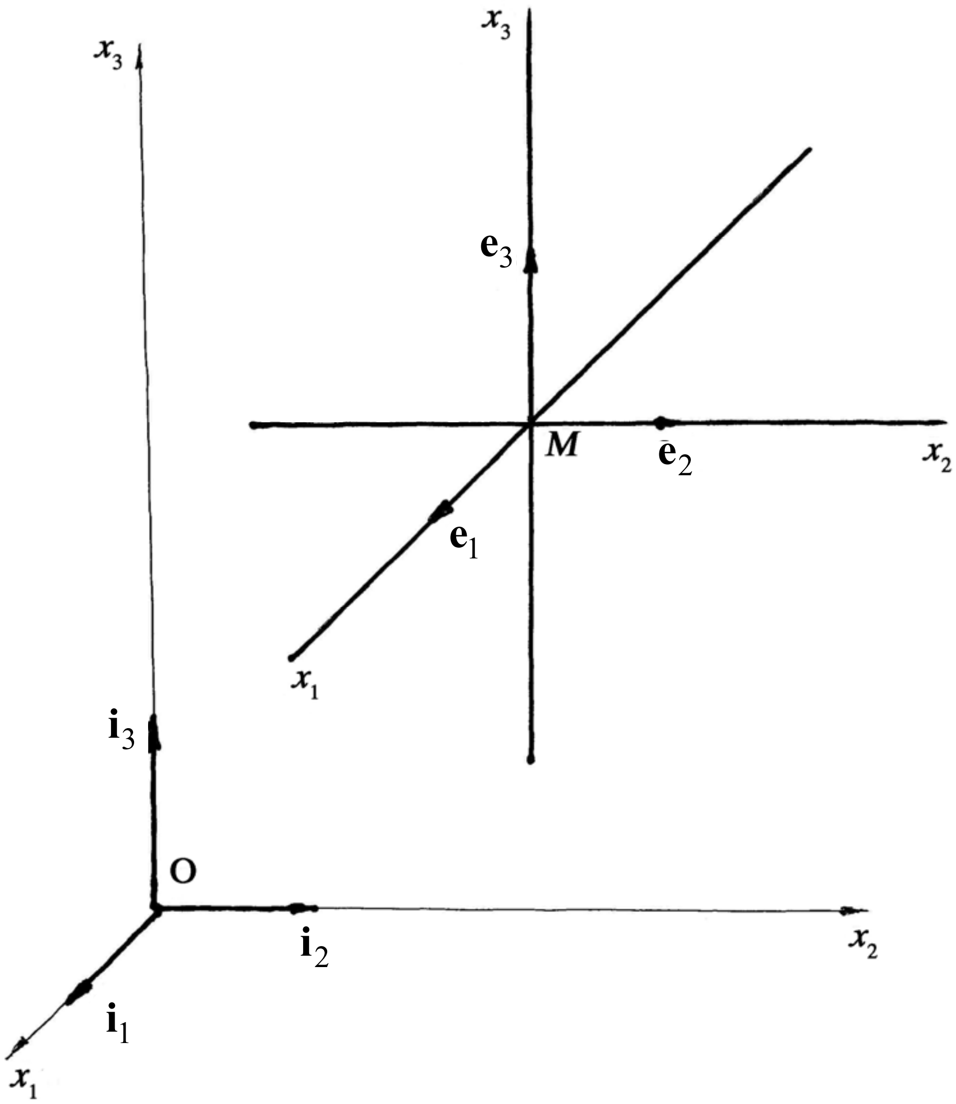

Рис. 2.2. Прямолинейная ортогональная система координат

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

2. Рассмотрим теперь цилиндрическую систему координат. Она изображена на рис. 2.3.

Здесь в качестве обобщенных координат принимаются расстояние r точки M от оси ox_3, угол φ между плоскостями Mox_3 и x_1ox_3 расстояние от точки M до плоскости x_1ox_2, так что имеем

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z. \tag{2.42}$$

Радиус-вектор точки M имеет следующее представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 r\cos\varphi + \mathbf{i}_2 r\sin\varphi + \mathbf{k}z. \tag{2.43}$$

На рис. 2.3 изображены координатные линии, проходящие через типичную точку M. Первая координатная линия — это прямая, направленная вдоль радиуса, вторая — это окружность, имеющая радиус r и расположенная в плоскости, параллельной плоскости x_1ox_2 и проходящей через точку M, третья — это прямая, параллельная оси ox_3 и проходящая через точку M.

Используя (2.43), находим касательные векторы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi = \mathbf{e}_r, \\ &\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = r(-\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi) = r\,\mathbf{e}_\varphi, \\ &\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} = \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Далее, пользуясь формулами (2.6) и (2.7) получаем значения базисных векторов и коэффициентов Ламе

$$\begin{aligned} &H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1, \\ &\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{2.45}$$

В силу определения (2.18) находим представление оператора Гамильтона в цилиндрической системе координат

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.46}$$

Произвольный вектор $\mathbf{u}$ зададим его разложением в базисе цилиндрической системы координат, т. е. напишем

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\varphi u_\varphi + \mathbf{e}_z u_z. \tag{2.47}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

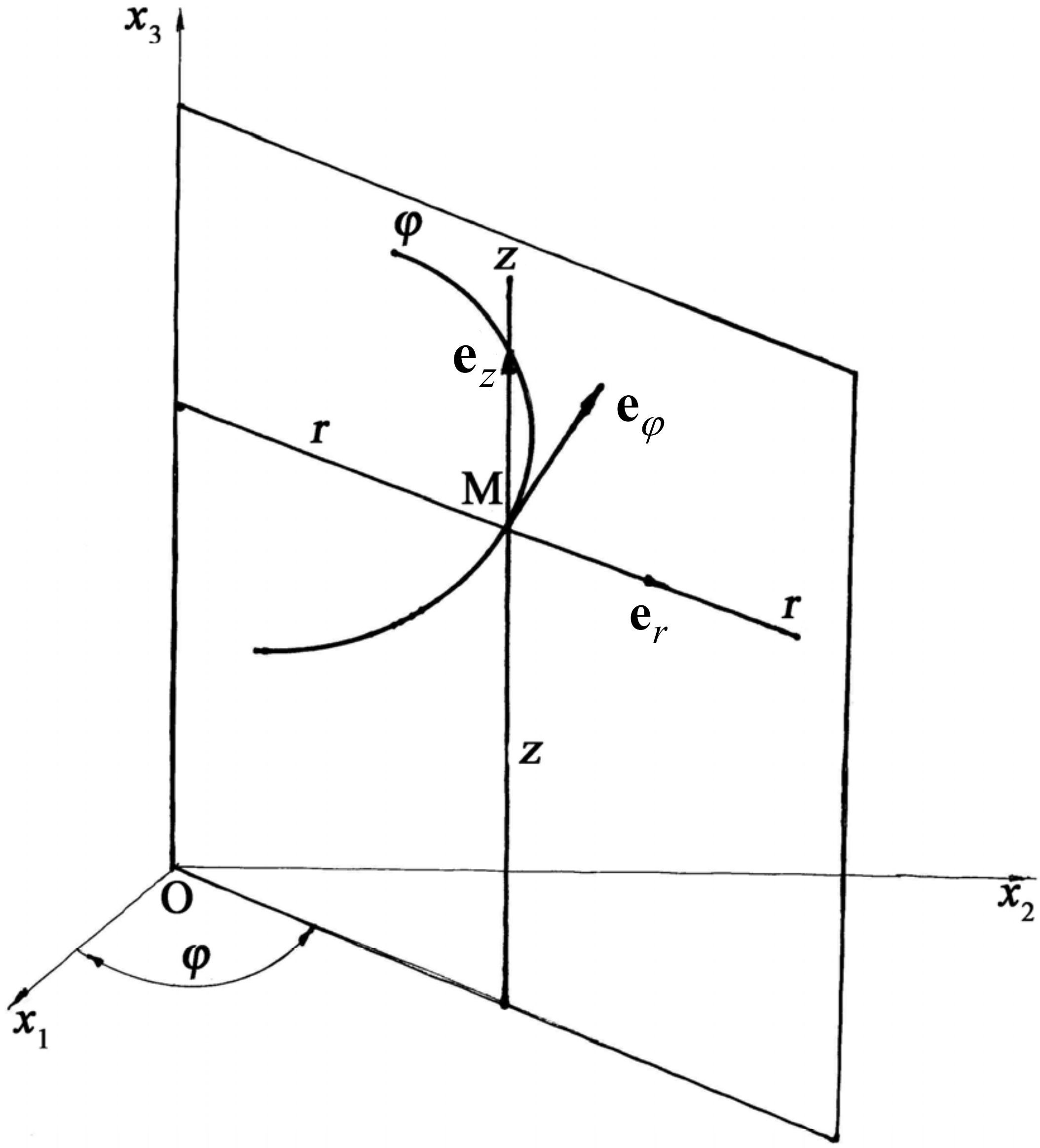

Рис. 2.3. Цилиндрическая система координат

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Результат действия оператора Гамильтона на вектор $\mathbf{u}$ имеет представление (2.21), причем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} u_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} u_z + \mathbf{e}_z \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} u_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} u_z + \mathbf{e}_z \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \qquad (2.48) \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} u_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} u_z + \mathbf{e}_z \frac{\partial u_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Здесь появились производные ортов цилиндрической системы координат по ее обобщенным координатам. Их значения определяются по деривационным формулам. Их можно найти прямым вычислением. Однако, проще всего сделать это, воспользовавшись формулой (2.26)

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbf{E} \qquad (2.49)$$

и следующим представлением вектора $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z. \qquad (2.50)$$

Подставляя (2.50) в (2.49), получим следующее уравнение

$$\nabla \mathbf{r} = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \right) = \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z.$$

Выполняя вычисления в левой части равенства, преобразуем его к следующему виду

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e_r e_r} + \mathbf{e_r} r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \mathbf{e_r} z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} + \\
&+ \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{z}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = \\
&= \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Приравнивая соответствующие диады и учитывая, что r и z произвольны, получим первую группу деривационных формул

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \qquad (2.51)$$

Вторую группу найдем, проводя прямое вычисление орта $\mathbf{e}_\varphi$ по следующей формуле

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z$$

и вычисляя градиент от правой и левой частей полученного равенства

$$\nabla \mathbf{e}_\varphi = -\left(\nabla \mathbf{e}_r\right) \times \mathbf{e}_z. \tag{2.52}$$

Градиент, стоящий справа, вычисляем с помощью уже найденных деривационных формул (2.51), в результате чего получаем

$$\nabla \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

и наконец,

$$-(\nabla \mathbf{e}_r) \times \mathbf{e}_z = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r.$$

Градиент, стоящий слева, находим прямым вычислением, так что уравнение (2.52) принимает в конце концов следующий вид

$$\nabla \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r.$$

Приравнивая соответствующие диады, стоящие в левой и правой частях, получим вторую группу деривационных формул

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = 0. \tag{2.53}$$

С помощью деривационных формул (2.51) и (2.53) вычислим, например, оператор Лапласа от скалярной функции λ

$$\Delta \lambda = \nabla \cdot \left(\nabla \lambda\right) = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right). \tag{2.54}$$

Первое, что нужно принять во внимание — это правило работы с оператором Гамильтона: сначала дифференцирование, а только потом умножение. Второе, на что следует обратить внимание — это то, что вычисления предстоят простые, но их много. Поэтому их нужно рационализировать. Нам предстоит проделать три операции: дифференцирование, использование деривационных формул и, наконец, умножение. Операции эти можно делать на бумаге, а можно в уме. Читатель может самостоятельно испытать все эти варианты. Я же приведу только один вариант — самый простой, но и самый занудный. Полагаю, что следует последовательно изучить действие операторов первой скобки в (2.54) на каждое слагаемое второй скобки. Таких комбинаций ровно девять. Начнем с первой. Имеем

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$L_1 = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \mathbf{e}_r \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial r}.$$

Очевидно, что в первом члене уже можно провести умножение ортов.

Второе слагаемое следует преобразовать, учитывая деривационные формулы.

Получим

$$L_1 = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + 0 = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2}.$$

Аналогичные операции проведем и в других комбинациях.

$$L_2 = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right) = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_r \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} =$$

$$= 0 + \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{o} \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = 0.$$

$$L_3 = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial z} + \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0.$$

$$L_4 = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} =$$

$$= 0 + \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r}.$$

$$L_5 = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} + \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} + \mathbf{e}_\varphi \cdot (-\mathbf{e}_r) \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2}.$$

$$L_6 = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi \partial z} + \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 + 0 = 0.$$

$$L_7 = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial z} + \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0 + 0 = 0.$$

$$L_8 = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi \partial z} + \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = 0 + 0 = 0.$$

$$L_9 = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + 0 = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Собирая теперь все слагаемые $L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_9$, получим окончательный результат:

$$\Delta\lambda = \nabla \cdot (\nabla\lambda) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}. \tag{2.55}$$

Точно так же следует вычислять и лапласиан от вектора и от тензора

$$\Delta\mathbf{a} = \nabla \cdot \left(\nabla\mathbf{a}\right) = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2}, \tag{2.56}$$

$$\Delta\mathbf{\Lambda} = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{\Lambda}) = \frac{\partial^2 \mathbf{\Lambda}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathbf{\Lambda}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{\Lambda}}{\partial z^2}. \tag{2.57}$$

Из этих формул находим представление оператора Лапласа, как дифференциального оператора второго порядка

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.58}$$

Такое представление оператора Лапласа в цилиндрической системе координат приводится в книгах по математике и математической физике.

3. Рассмотрим, наконец, сферическую систему координат. Она изображена на рис. 2.4.

Здесь в качестве обобщенных координат принимается расстояние от точки M до начала координат, угол φ между плоскостью Mox_3 и плоскостью x_1ox_3, и угол θ между направлением OM и плоскостью x_1ox_2, так что имеем

$$q_1 = R, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta. \tag{2.59}$$

На рис. 2.4. изображены координатные линии, проходящие через точку M. Первая координатная линия — это прямая, проходящая через начало координат и точку M, вторая — это окружность, расположенная в плоскости, параллельной координатной плоскости x_1ox_2 и проходящая через точку M, третья — это окружность, расположенная в плоскости Mox_3 и тоже проходящая через точку M. Орты касательных к координатным линиям обозначены $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_\theta$.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

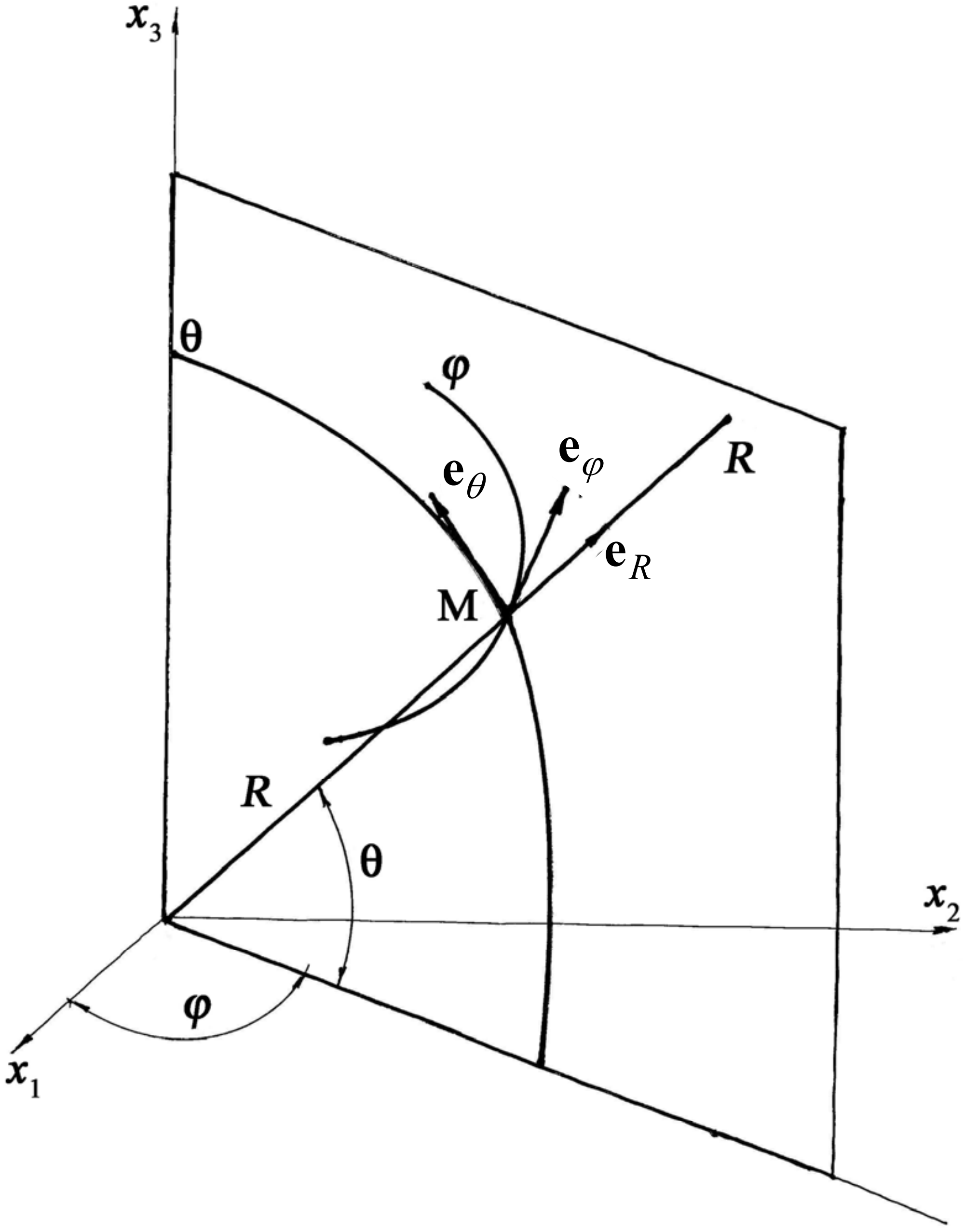

Рис. 2.4. Сферическая система координат

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе: Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Коэффициенты Ламе найдем, рассматривая малый элемент длины. Его каноническое выражение дается формулой (2.16)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_k H_k dq_k, \qquad \left(\sum_k\right),$$

тогда как фактическое представление в сферических координатах имеет вид

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_R dR + \mathbf{e}_\varphi R\cos\theta d\varphi + \mathbf{e}_\theta R d\theta.$$

Приравнивая друг другу эти два последних выражения и учитывая (2.59), находим

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = R\cos\theta, \qquad H_3 = R.$$

В соответствии с формулой (2.18) оператор Гамильтона в сферической координатной системе имеет следующее выражение

$$\nabla = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{2.60}$$

Деривационные формулы получим, используя свой опыт работы в цилиндрической системе координат. Два орта цилиндрической системы координат найдем проектированием, в результате чего получим

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_R \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta,$$
$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_R \sin\theta + \mathbf{e}_\theta \cos\theta.$$

Дифференцируя эти соотношения по обобщенной координате φ, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi} &= \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\varphi}\cos\theta - \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi}\sin\theta = \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\varphi} &= \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\varphi}\sin\theta + \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi}\cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Здесь справа написаны значения этих производных в соответствии с (2.51).

Соотношения (2.61) представляют собой уравнения для определения производных от ортов сферической координатной системы по обобщенной координате φ. Решая эту систему, находим значения этих производных

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\varphi} = \mathbf{e}_\varphi \cos\theta, \qquad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi} = -\mathbf{e}_\varphi \sin\theta. \tag{2.62}$$

Далее, запишем очевидные формулы дифференцирования по R

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial R}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial R}=0,\quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial R}=0, \tag{2.63}$$

поскольку ни один из ортов не изменяется при движении вдоль координатной $R-$линии.

Наконец, опять воспользуемся своим опытом, полученным при изучении цилиндрической системы координат, и напишем следующие формулы

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-\mathbf{e}_r=-\mathbf{e}_R\cos\theta+\mathbf{e}_\theta\sin\theta,\\ &\frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial \theta}=\mathbf{e}_\theta,\quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta}=-\mathbf{e}_R.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Ко всему уже написанному добавим очевидное соотношение, демонстрирующее то, что при изменении координаты θ орт оси $\mathbf{e}_\varphi$ не изменяется

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta}=0. \tag{2.65}$$

Выражения (2.62), (2.63), (2.64) и (2.65) представляют собой деривационные формулы сферической системы координат. Эти формулы следует использовать при работе с оператором Гамильтона.

В заключение привожу по литературным данным представление оператора Лапласа в сферической системе координат

$$\Delta\lambda=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\lambda}{\partial R}\right)+\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\varphi^2}\right). \tag{2.66}$$

2.5. Вычисление градиента скалярной, векторной и тензорной функций в повернутой системе координат

Рассматриваем скалярную, векторную и тензорную функции пространственной координаты $\mathbf{r}$

$$\varphi=\varphi(\mathbf{r}),\quad \mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r}),\quad \mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{r}). \tag{2.67}$$

Допустим, что уже вычислены их градиенты $\nabla\varphi$, $\nabla\mathbf{u}$, $\nabla\mathbf{P}$. Зададим вектор $\mathbf{r}$ его разложением в прямолинейной, ортогональной декартовой системе координат

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}_k x_k, \tag{2.68}$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

где x_k — координаты вектора положения $\mathbf{r}$, а $\mathbf{i}_k$ — базисные векторы введенной системы координат. Так что названные градиенты имеют стандартное представление

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k},$$
$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{i}_k \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}, \tag{2.69}$$
$$\nabla\mathbf{P} = \mathbf{i}_k \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial x_k}.$$

Введем новую координатную систему, в которой вектор $\mathbf{r}'$ будет представлять повернутый вектор $\mathbf{r}$, так что по (1.167) он будет иметь представление

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{r}, \tag{2.70}$$

где $\mathbf{A}$ — или ортогональный тензор, или тензор поворота, или, наконец, тензор отражений. Считаем, что $\mathbf{A} = const$.

Обратная формула имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{r}' = \mathbf{r}'\cdot\mathbf{A}. \tag{2.71}$$

Если подставить (2.71) в (2.67), то получим представление φ, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{P}$, как функций новых переменных $\mathbf{r}'$, т. е.

$$\varphi = \varphi\left(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{r}'\right),\quad \mathbf{u} = \mathbf{u}\left(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{r}'\right),\quad \mathbf{P} = \mathbf{P}\left(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{r}'\right). \tag{2.72}$$

Теперь это уже функции нового вектора $\mathbf{r}'$. Отметим эти новые функции крышкой сверху, так что будем иметь

$$\varphi = \hat{\varphi}(\mathbf{r}'),\quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}'),\quad \mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}'). \tag{2.73}$$

Вычислим градиенты этих функций в новой системе координат. Зададим новый вектор положения $\mathbf{r}'$ в той же самой прямолинейной ортогональной координатной системе с базисными векторами $\mathbf{i}_k$, что и та, в которой был задан вектор $\mathbf{r}$. Будем иметь

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i}_k x_k', \tag{2.74}$$

где x_k' — его координаты.

Тогда искомые градиенты будут иметь следующие представления

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

$$\nabla'\varphi = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\hat{\varphi}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\hat{\varphi}(x'_1, x'_2, x'_3),$$

$$\nabla'\mathbf{u} = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\hat{\mathbf{u}}(x'_1, x'_2, x'_3), \tag{2.75}$$

$$\nabla'\mathbf{P} = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x'_k}\hat{\mathbf{P}}(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Полагаем, что с помощью выражений (2.68) и (2.71) может быть установлена связь между старыми координатами x_k и новыми x'_k

$$x_k = x_k(x'_1, x'_2, x'_3), \quad k = 1, 2, 3.$$

Подставив эти выражения в (2.73), получим, например, для третьей функции следующее представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{P}}(x'_1, x'_2, x'_3) = \\ &= \mathbf{P}\big(x_1(x'_1, x'_2, x'_3),\ x_2(x'_1, x'_2, x'_3),\ x_3(x'_1, x'_2, x'_3)\big). \end{aligned} \tag{2.76}$$

Ограничимся далее вычислением только третьего из градиентов (2.75). Будем иметь

$$\nabla'\mathbf{P} = \nabla'\hat{\mathbf{P}}(x'_1, x'_2, x'_3) = \mathbf{i}_k \frac{\partial\hat{\mathbf{P}}}{\partial x'_k}. \tag{2.77}$$

Входящие сюда производные вычислим по правилу вычисления производной сложной функции, заданной своим представлением (2.76). Получим

$$\nabla'\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{i}_k \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x'_k}. \tag{2.78}$$

Перепишем это выражение следующим образом

$$\nabla'\hat{\mathbf{P}} = \left(\mathbf{i}_k \frac{\partial x_m \mathbf{i}_m}{\partial x'_k}\right)\cdot\left(\mathbf{i}_l \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial x_l}\right). \tag{2.79}$$

В первой скобке здесь стоит градиент старого вектора $\mathbf{r}$ по новым координатам x'_1, x'_2, x'_3, а во второй — градиент в старых переменных x_1, x_2, x_3. Таким образом, можем записать

$$\nabla'\hat{\mathbf{P}} = (\nabla'\mathbf{r})\cdot(\nabla\mathbf{P}). \tag{2.80}$$

Величину $\nabla'\mathbf{r}$ вычислим с помощью (2.71), т. е.

$$\nabla'\mathbf{r} = (\nabla'\mathbf{r}')\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Таким образом, искомый градиент тензора $\mathbf{P}$ оказался равным следующему значению

$$\nabla' \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{A} \cdot \left(\nabla \mathbf{P}\right). \tag{2.81}$$

Аналогичным образом можно вычислить и другие градиенты

$$\nabla' \hat{\varphi} = \mathbf{A} \cdot \left(\nabla \varphi\right), \tag{2.82}$$

$$\nabla' \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \cdot \left(\nabla \mathbf{u}\right). \tag{2.83}$$

Получился удивительно простой результат (2.81), (2.82) и (2.83). Поэтому возникает мысль о том, что их можно получить каким-нибудь более простым и наглядным способом. Такой способ можно предложить для формулы (2.82).

Опишем этот способ. Вводим в рассмотрение некоторое абсолютно твердое тело и вмораживаем в него координатную систему $ox_1x_2x_3$ с осями ox_1, ox_2 и ox_3. Она жестко связана с телом. Далее, полагаем, что в теле задано некоторое скалярное свойство φ, например, температура. Градиент этого свойства в системе $ox_1x_2x_3$, связанной с телом, равен $\nabla\varphi$. «Повернем» тело, как это предписывает преобразование $\mathbf{A}$. При этом повернутся все оси и все векторы, связанные с телом. Вектор $\mathbf{r}$ превратится в $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$, а вектор-градиент превратится в $\mathbf{A} \cdot \left(\nabla \varphi\right)$. А это как раз то, что предписано формулами (2.70) и (2.82). Более сложно предвидеть появление формул (2.83) и (2.81).

2.6. Формула Гаусса – Остроградского для преобразования объемного интеграла в поверхностный для тензоров второго ранга

Рассматриваем некоторый объем v, ограниченный поверхностью s (см. рис. 2.5). Полагаем, что во всем объеме, включая и точки поверхно сти, задана некоторая векторная функция $\mathbf{a}$. Традиционное написание формулы Гаусса – Остроградского таково:

$$\int\limits_v div\, \mathbf{a}\, dv = \int\limits_s \mathbf{a}_n ds.$$

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

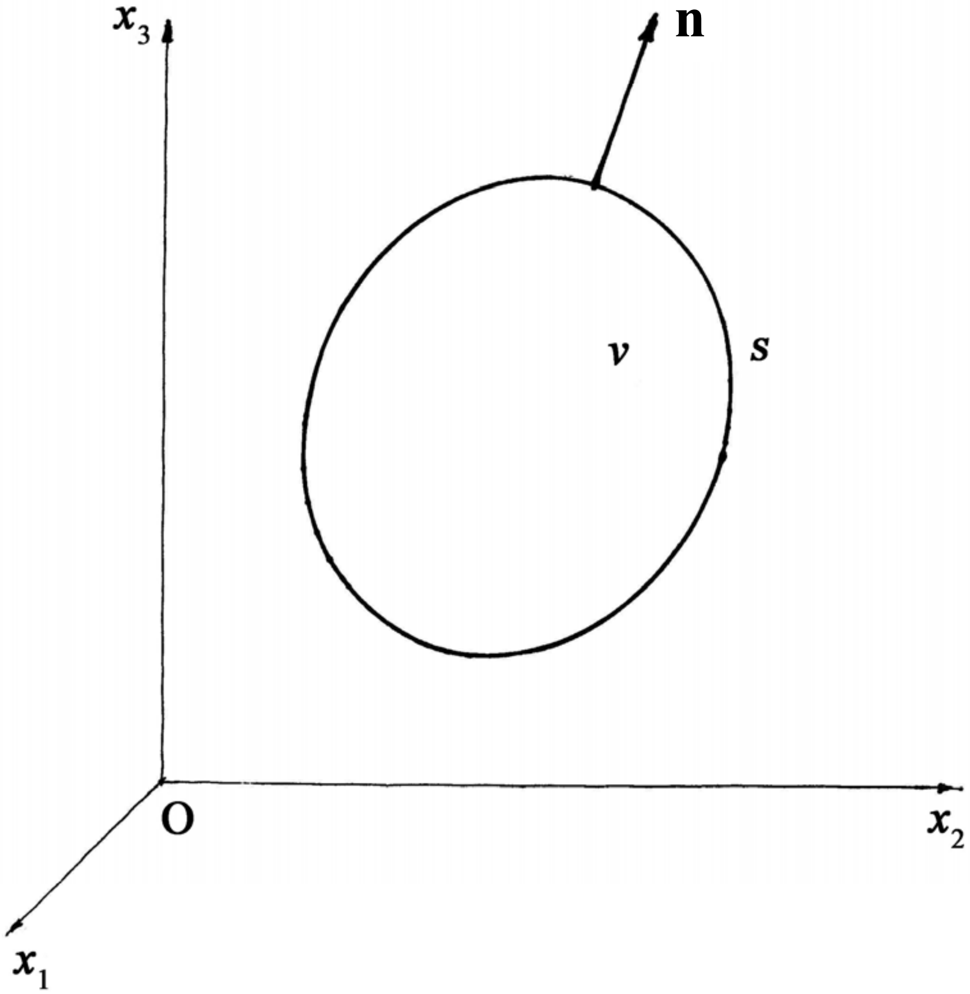

Рис. 2.5. Объем и поверхность в формуле Гаусса – Остроградского

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Здесь $div\,\mathbf{a}$ — дивергенция вектора $\mathbf{a}$

$$div\,\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}, \tag{2.84}$$

а $\mathbf{a}_n$ — проекция вектора $\mathbf{a}$ на нормаль к поверхности $\mathbf{n}$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}. \tag{2.85}$$

Подставив эти значения в формулу Гаусса – Остроградского, получим ее конструктивное написание

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{a}\; dv = \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}\; ds. \tag{2.86}$$

Большой интерес представляет обобщение формулы Гаусса – Остроградского на случай, когда под знаком интеграла стоит не вектор $\mathbf{a}$, а тензор $\mathbf{T}$. Чтобы получить это обобщение, рассмотрим формулы Гаусса – Остроградского, примененные к трем векторам $\mathbf{a}_k$

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{a}_k dv = \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_k ds, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Умножим обе части этого равенства справа на $\mathbf{i}_k$ — базисные векторы системы координат — и сложим результаты. Получим

$$\left(\int_v \nabla \cdot \mathbf{a}_k\; dv\right) \cdot \mathbf{i}_k = \left(\int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_k\; ds\right) \cdot \mathbf{i}_k. \tag{2.87}$$

Полагаем, что орты $\mathbf{i}_k$ постоянны, т. е.

$$\mathbf{i}_k = \underset{\mathbf{r}}{const}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Поэтому их можно внести и под знаки интегралов и под знак вычисления дивергенции. Тогда формула (2.87) примет следующий вид

$$\int_v \nabla \cdot \left(\mathbf{a}_k \mathbf{i}_k\right) dv = \int_s \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{a}_k \mathbf{i}_k\right) ds.$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}_k \mathbf{i}_k, \tag{2.88}$$

получаем следующий окончательный результат

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{T}\; dv = \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\; ds. \tag{2.89}$$

Выражение $\mathbf{T}$ по (2.88) представляет общее выражение тензора второго ранга в виде суммы трех диад. Так что (2.89) представляет обобщение формулы (2.86) на случай тензорного аргумента. Структура формул (2.86) и (2.89) необычайно проста: в объемном интеграле стоит оператор Гамиль-

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

тона, а в поверхностном — в том же выражении стоит вектор нормали к поверхности. По такому же принципу могут быть составлены и другие формулы. Некоторые из них приводим ниже:

$$\int_v \nabla\varphi\, dv = \int_s \mathbf{n}\varphi\, ds,$$

$$\int_v \nabla\times\mathbf{T} dv = \int_s \mathbf{n}\times\mathbf{T} ds,$$

$$\int_v \nabla\mathbf{P} dv = \int_s \mathbf{n}\mathbf{P} ds.$$

2.7. Формула Стокса для преобразования контурного интеграла в поверхностный

Полагаем, что в некоторой односвязной области пространства задана векторная функция пространственной координаты, т. е.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}).$$

Проведем в этой области замкнутый контур L и вычислим циркуляцию вектора по следующей формуле

$$\oint_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}.$$

Теорема Стокса утверждает, что эта циркуляция равна потоку ротора вектора $\mathbf{a}$ через произвольную поверхность, целиком лежащую в области определения $\mathbf{a}$ и опирающуюся на этот контур

$$\oint_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}. = \int_S \mathbf{n}\cdot rot\,\mathbf{a}\, dS. \qquad (2.90)$$

Контур L и поверхность S показаны на рис. 2.6.

Наша цель состоит в обобщении формулы (2.90) на случай, когда аргументом является тензор $\mathbf{T}$, а не вектор $\mathbf{a}$.

Представляется очевидным, что взять и просто заменить $\mathbf{a}$ на $\mathbf{T}$ в (2.90) нельзя, хотя именно к такой замене свелось дело при переходе от (2.86) к (2.89) при обобщении формулы Гаусса – Остроградского. Необходимо некоторое рассуждение, которое, кстати, приведет к другому результату. Это рассуждение покажет, что простая замена $\mathbf{a}$ на $\mathbf{T}$ недопустима.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

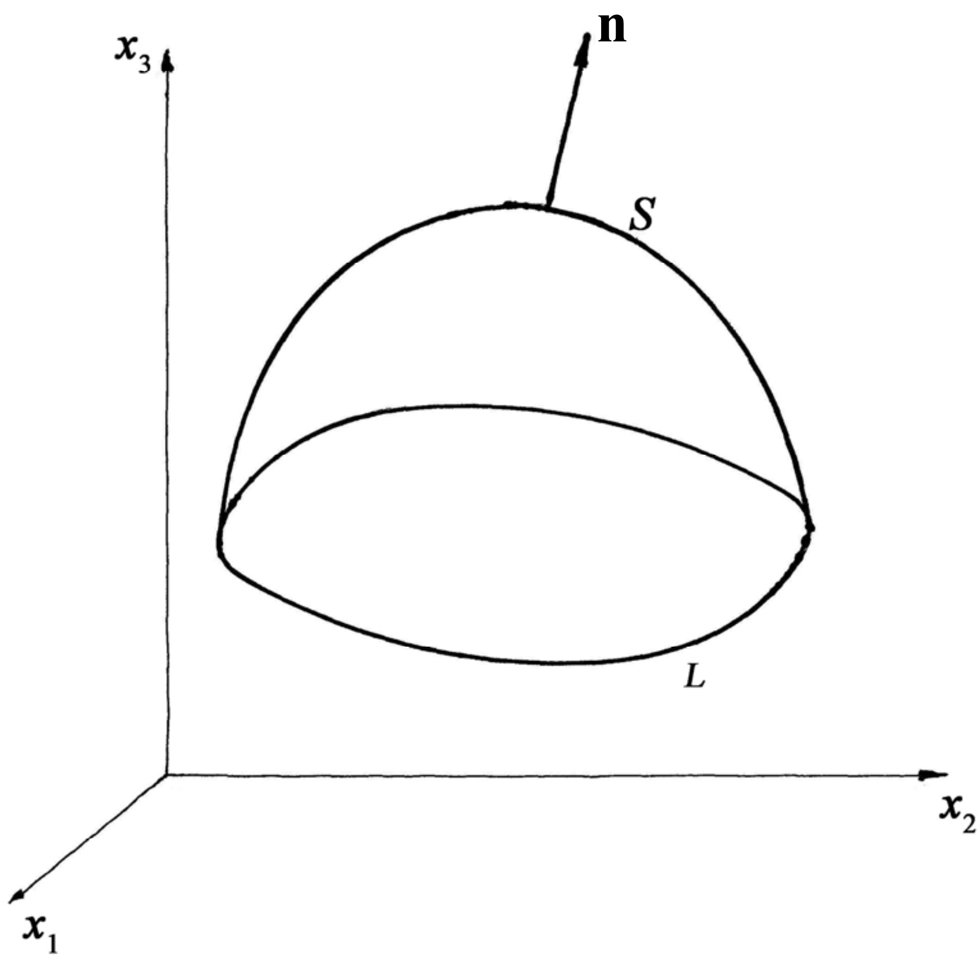

Рис. 2.6. Контур и поверхность в формуле Стокса

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Перепишем (2.90) в конструктивной форме, заменив ротор $\mathbf{a}$ его конструктивным выражением

$$rot\,\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}.$$

Подстановка этого выражения в (2.90) дает следующий результат

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{a})\, dS. \qquad (2.91)$$

Поступить здесь так же, как мы это сделали в (2.87), невозможно. Поэтому перепишем (2.91) в следующей форме

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -\int_S (\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{n}\, dS. \qquad (2.92)$$

Запишем теперь формулу (2.92) для трех векторов $\mathbf{a}_k$

$$\oint_L \mathbf{a}_k \cdot d\mathbf{r} = -\int_S (\mathbf{a}_k \times \nabla) \cdot \mathbf{n}\, dS, \qquad k = 1, 2, 3. \qquad (2.93)$$

Наконец, умножим обе части равенств (2.93) слева на базисные векторы прямолинейной ортогональной системы координат $\mathbf{i}_k$ и, пользуясь тем, что эти векторы постоянны, внесем их под знаки интегралов и под знак оператора Гамильтона. В результате таких действий получим

$$\oint_L \left(\mathbf{i}_k \mathbf{a}_k\right) \cdot d\mathbf{r} = -\int_S \left(\left(\mathbf{i}_k \mathbf{a}_k\right) \times \nabla\right) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Поскольку выражение $\mathbf{i}_k \mathbf{a}_k$ представляет некоторый тензор $\mathbf{T}$ приходим к следующему обобщению формулы Стокса на случай тензорного аргумента

$$\oint_L \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = -\int_S (\mathbf{T} \times \nabla) \cdot \mathbf{n}\, dS. \qquad (2.94)$$

Как видно, она не может быть получена из (2.91) простой заменой $\mathbf{a}$ на $\mathbf{T}$.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, полагаю, что выполнены все те намерения, которые декларировались во введении. А главным намерением автора было компактное изложение прямого тензорного исчисления. Автор старался свести к минимуму обращение к координатной форме представления векторов и тензоров. Более того, обращение к координатной форме осуществлялось как можно позже. Так, удалось изложить почти всю тензорную алгебру, включая все многочисленные произведения тензоров без обращения к координатной форме тензоров. Настоятельная необходимость в ней появилась при введении единичного тензора и тензора Леви – Чивита.

Это самое главное.

Далее, именно под лозунгом исключительного использования прямого тензорного исчисления рассмотрены вопросы, традиционные для тензорного исчисления, адаптированные для механики деформируемых тел.

Далее, считаю важным дополнением к этим вопросам вопросы, включенные в раздел 1.19 «Инвариантность тензорных соотношений». Содержание его оказывается важным для рассмотрения теории определяющих уравнений в механике деформируемых тел.

Далее, при изложении элементов тензорного анализа я старался свести к минимуму подробности, связанные с криволинейными координатами общего вида. Я ограничился рассмотрением только ортогональных координатных систем. Почему? Считаю, что рассмотрение криволинейных координат общего вида уводит далеко в сторону от рассмотрения собственно вопросов механики деформируемых тел и, вообще, отвлекает от механики. Все, что нужно для механики, можно сказать, используя только ортогональные координатные системы. Кроме того, считаю важным включение нетрадиционного для тензорного исчисления раздела 2.5, посвященного вычислению градиентов разнообразных тензоров в новых координатах и выражению их через градиенты этих же тензоров в старых координатных системах. Содержание этого раздела оказывается востребованным в теории определяющих уравнений.

Кроме всего сказанного обращаю внимание читателя на нетрадиционное изложение обобщения формулы Стокса на случай тензорной функции.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Наконец, считаю полезной нетрадиционную формулировку «правила Лейбница» для действия оператора Гамильтона на произведение тензоров и векторов. Она оказывается исключительно полезной при рассмотрении формул, в которых оператор Гамильтона встречается два или более раз.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. — Москва.: Наука, 1970. — 343 с.

2. Лурье А.И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 939 с.

3. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука, 1965. — 455 с.

4. Лагалли. Векторное исчисление. — М. Л.: ОНТИ, 1936. — 343 с.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.

6. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерных пространствах. — СПб.: Нестор, 2001. — 275 с.

Данное пособие любезно предоставлено проф. В.А. Пальмовым для размещения на сайте www.FEA.ru в разделе:
Высшее образование / Каф. "Механика и процессы управления" НИУ СПбГПУ / Учебные пособия

Учебное издание

Владимир Александрович ПАЛЬМОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т. 2;
95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 07.11.2008. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. 7,0. Тираж 80. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором, в Цифровом типографском центре Издательства Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 550-40-14.
Тел./факс: (812) 297-57-76.